

節点位置の不確実性を考慮したトラス構造のロバスト最適化手法

橋本 大樹

東京大学工学部計数工学科数理情報工学コース
 (現所属：東京大学情報理工学系研究科数理情報第5研究室)
 指導教員：寒野善博 准教授

1. 研究動機

機械・建築の分野において、構造物の位相構造（部材の接続関係）を決める位相最適化は設計などに広い応用がある。本研究は、トラス構造物の位相最適化の手法を提案する。

従来の位相最適化問題は、材質や形状および想定される外力が設計どおりであると仮定して、最適な設計解を求めることを目標にしていた。しかし、実際の構造物には、想定外力以外の力の作用や、施工・製造により生じる誤差が生じるため、これらの不確実性を考慮して最適化を行うことが重要である。このように不確実性を考慮する意義の1つとして、最適解が不安定で非現実的な設計解となることを防ぐことが挙げられる。

本研究では、不確実性を含んだ数理計画問題を扱う手法の1つである、ロバスト最適化と呼ばれる手法を用いる。これは、不確実なデータの取りうる値の範囲をあらかじめ定め、その中で最悪の場合を想定して最適化を行うという手法である。

トラスのロバスト最適化に関して、Ben-Tal and Nemirovski [1] や Guo et al. [2] によって、外力や部材の断面積に不確実性のある場合の研究が行われている。本研究では、トラスの節点（部材接合部）の位置に不確実性を考慮して最適化を行う手法を提案する。節点位置の不確実性を考慮したロバスト最適化問題は、剛性行列が節点の位置について非線形であるために厳密に解くのは難しい。そこで本研究では、提案する問題で得られる解が元の問題の制約を満たすように、制約を強めることで近似を行い、半正定値計画問題（SDP）として定式化する手法を提案する。以下では上記の意味での近似のことを保守的近似と表現する。

2. 提案手法

2.1 準備

初めに、不確実性を考慮に入れない位相最適化問題として、体積制約の下でのコンプライアンス最小化問題を考える。

各節点の位置と各部材の断面積をそれぞれ縦に並べたベクトルを、 \mathbf{x} 、 \mathbf{a} とおき、そのときの剛性行列を $K(\mathbf{a}; \mathbf{x})$ 、各部材の長さを縦に並べたものを $\mathbf{l}(\mathbf{x})$ とする。さらに、外力を \mathbf{f} 、体積上限指定値を V_U 、コンプライアンスを C_U としたとき、体積制約下でのコンプライアンス最小化問題は以下の問題に帰着できる：

$$(TO): \begin{aligned} & \text{Minimize}_{\mathbf{a}, C_U} C_U \\ & \text{subject to} \begin{bmatrix} C_U & \mathbf{f}^T \\ \mathbf{f} & K(\mathbf{a}; \mathbf{x}) \end{bmatrix} \succeq O, \\ & \mathbf{l}(\mathbf{x})^T \mathbf{a} \leq V_U, \mathbf{a} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

ただし、 $X \succeq O$ は行列 X が半正定値であることを表す。トラスの剛性行列は、部材断面積 \mathbf{a} に対して線形であることが知られている。そのため、節点位置を固定した非ロバスト最適化問題を考えるときには、この問題は半正定値計画問題となる。

しかし、節点の位置に不確実性を考慮すると半正定値計画問題ではなくなってしまう。節点の位置 \mathbf{x} は、節点位置の公称値 $\bar{\mathbf{x}}$ を中心とする、ある楕円体の内部に存在すると仮定する。すなわち、

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + A\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{Z}_r = \{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^l : \|\boldsymbol{\zeta}\|_2 \leq r\}.$$

とする。このとき、体積制約のための式 $\mathbf{l}(\mathbf{x})^T \mathbf{a} \leq V_U$ に対して不確実性を考慮することは重要ではないので、 $\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{l}(\bar{\mathbf{x}})$ とし、ここでは以下の問題を考える：

$$(RTO): \begin{aligned} & \text{Minimize}_{\mathbf{a}, C_U} C_U \\ & \text{subject to} \begin{bmatrix} C_U & \mathbf{f}^T \\ \mathbf{f} & K(\mathbf{a}; \bar{\mathbf{x}} + A\boldsymbol{\zeta}) \end{bmatrix} \succeq O, \\ & \forall \boldsymbol{\zeta} \in \mathcal{Z}_r, \\ & \bar{\mathbf{l}}^T \mathbf{a} \leq V_U, \mathbf{a} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

2.2 提案手法による保守的近似

部材の集合を \mathcal{B} とおく。さらに各部材 $i \in \mathcal{B}$ に対して、

$$\alpha_i(\zeta) = \frac{E_i}{l_i(\bar{x} + A\zeta)^3}$$

と定義する。ただし E_i はヤング率とした。このとき剛性行列は、この α_i とある定ベクトル \mathbf{b}_i 、定行列 C_i を用いて

$$K(\mathbf{a}; \zeta) = \sum_{i \in \mathcal{B}} a_i \alpha_i(\zeta) (\mathbf{b}_i + C_i \zeta) (\mathbf{b}_i + C_i \zeta)^T$$

と書ける。線形行列不等式 (LMI) の部分を 2 次形式で表現し、上の事実や \mathcal{S} 補題を用いることによって、ロバスト最適化問題 (RTO) は、以下の問題 (ARTO) に保守的に近似することができる：

(ARTO) :

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && C_U \\ & \mathbf{a}, \lambda, C_U \\ & \text{subject to} && \begin{bmatrix} & & \\ C_U & \mathbf{f}^T & \\ \mathbf{f} & & \end{bmatrix} + \sum_{i \in \mathcal{B}} a_i \alpha_{iL} \begin{bmatrix} & & -r B_i^T \\ & & \\ -r B_i & & \mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T \end{bmatrix} \\ & && + \sum_{i \in \mathcal{B}} \lambda_i \begin{bmatrix} M_i & & \\ & & \\ & & -C_i C_i^T \end{bmatrix} \geq O, \end{aligned}$$

$$\bar{l}^T \mathbf{a} \leq V_U,$$

$$\mathbf{a} \geq 0, \lambda \geq 0.$$

ただし、 M_i は i 行 i 列成分が 1 でほかの成分は 0 な行列であり、 B_i は第 i 列目が \mathbf{b}_i で他の成分は 0 な行列である。また、任意の部材 $i \in \mathcal{B}$ に対して、 α_{iL} は、

$$0 < \alpha_{iL} \leq \min_{\zeta \in \mathcal{Z}_r} \alpha_i(\zeta)$$

を満たす定数である。得られた問題 (ARTO) は SDP であり、効率よく解くことができる。

3. 提案手法に対する考察

次に、不確実性を考慮する前の問題 (TO) と問題 (ARTO) で、問題のサイズを比較する。設計変数に λ が増えるため、部材の数だけ設計変数の数が増えている。また LMI 制約における行列のサイズも部材の数だけ増加している。しかし一方で、問題 (ARTO) の LMI 制約の左辺の行列は、疎行列であるため、省メモリや高速化が期待できる。

さらに、すべての節点の不確実性を考慮する場合など、節点に対して十分な不確実性を設定した場合、問題 (ARTO) によって得られる解は、常に安定なトラスであることが証明できる。このため、本研究で提案する手法を用いることにより、トラスの位相最適化問題

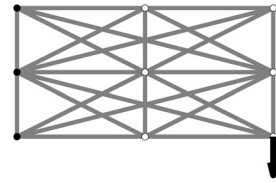


図 1 グランドストラクチャ (存在可能部材) と外力

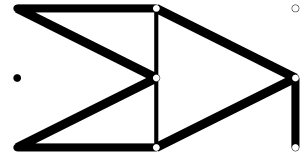


図 2 不確実性を考慮しない場合の最適解

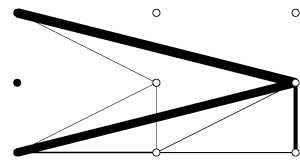


図 3 不確実性を考慮した場合の最適解

に対して安定でロバストな近似解が得られることがわかる。

4. 数値実験

図 1 のような 3×3 の格子点上にある 9 個の節点が 24 の部材で結ばれている初期設定を考え、どの部材を用いるのが最適か求める。水平な部材の長さはすべて 1m、垂直な部材の長さはすべて 0.5m とする。左端の黒丸で表される 3 節点は固定され、右下端の節点に、鉛直下方向に 10N の力が働くと仮定する。また部材総体積の上限は 0.05 m^3 とする。

また節点の位置への不確実性の設定としては、すべての節点に対して不確実性を考慮するために A を単位行列とし、不確実性の大きさは $r = 0.05 \text{ m}$ とする。

このとき、節点の位置に不確実性を考慮しないで問題 (TO) を解くと、図 2 が得られる。これは、右下の部材が支えなしで垂れ下がっているため不安定である。一方で不確実性を考慮し問題 (ARTO) を解いた解である図 3 では安定なトラスが得られていることがわかる。

参考文献

- [1] A. Ben-Tal and A. Nemirovski, Robust truss topology design via semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*, 7(4), 991–1016, 1997.
- [2] X. Guo, W. Bai, W. Zhang, and X. Gao, Confidence structural robust design and optimization under stiffness and load uncertainties, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(41), 3378–3399, 2009.