

# 2次錐計画と2乗スラック変数法

福田 エレン 秀美, 福島 雅夫

数理計画問題に対して2乗スラック変数を用いて不等式制約条件を等式制約条件に変換する手法は従来からよく知られている。ところが、この手法は変数の次元を増加させ、数値的な不安定性や特異性を引き起こす可能性があるため、専門家の間では重要視されてこなかった。しかし、近年注目されている非線形2次錐計画問題の場合、2乗スラック変数を用いて再定式化した問題は通常非線形計画問題となる。よって、非線形計画の汎用ソルバーを用いて解くことが可能となり、実用面での有用性が期待できる。本稿では、非線形2次錐計画問題の基礎的事項を簡単にまとめたあと、2乗スラック変数法を紹介する。

キーワード：非線形2次錐計画問題, 2乗スラック変数, KKT条件, 2次の十分条件, 制約想定

## 1. はじめに

新しい変数を導入し、制約付き最適化問題の不等式制約条件を比較的取り扱いやすい等式制約条件に変換する技法をスラック変数法という。特に、任意の線形計画問題 (Linear Programming, LP) が非負スラック変数を用いて標準形に変換できることはよく知られている。非負スラック変数は非線形計画問題 (Nonlinear Programming, NLP) においても、MINOS (縮約勾配法) や LANCELOT (拡張ラグランジュ法) などのソルバーで使用されている。一方、非負変数の代わりに、新しい変数の2乗 (以下では2乗スラック変数という) を用いると、任意の問題を不等式制約条件を含まない等式制約条件のみの問題に変換できる。一般に等式制約条件は不等式制約条件より取り扱いやすいという利点があるが、2乗スラック変数は数値的な不安定性や特異性を引き起こす可能性があるため、通常非線形NLPに対してあまり用いられることはなかった [1~3]。ところが、本稿で述べるように、非線形2次錐計画問題では状況が異なる。

2次錐計画問題 (Second-Order Cone Programming, SOCP) とは、2次錐制約と呼ばれる特別な制約条件の下で、目的関数を最小化または最大化する数理計画問題であり、ロバスト最適化をはじめ、様々な数理最適化のモデリングに用いられている。SOCPは半正定値計画問題 (Semidefinite Programming, SDP)

の特殊な場合と見なすことができるので、SOCPをSDPに再定式化して解くことは可能であるが、2次錐を直接取り扱うことによって計算コストが抑えられる。そのような理由から、SOCPは注目されている数理計画問題の一つであり、特に目的関数と制約関数が線形な場合に対しては、これまで多くの研究がなされてきた [4~6]。しかし、非線形SOCPに関する研究がなされてきたのはここ十年あまりであり、これまで正確なペナルティ法 [7]、半平滑ニュートン法 [8]、逐次2次計画法 [9]、拡張ラグランジュ法 [10]、主双対内点法 [11] などの解法が開発されているが、現状は必ずしも十分であるとはいえない。

非線形SOCPに対して2乗スラック変数を用いるのは、NLPの場合より興味深いと考えられる。なぜならば、2乗スラック変数を用いて再定式化された問題はもはやSOCPではなく、通常非線形NLP問題だからである。この事実は、これまで取り扱いが比較的困難であった非線形SOCPが、2次錐制約を等式制約に変換することによって、汎用のNLPソルバーで解けることを意味している。NLPの場合と同様、非線形SOCPに対する2乗スラック変数法は数値的に好ましくないと危惧されるかもしれない。しかし、非線形SOCPをNLPに再定式化するのは非常に容易であり、さらにNLPソルバーは、非線形SOCPと違い、開発が進んでいるため、2乗スラック変数法は一般のユーザーにも使いやすいという大きな利点がある。

本稿では、著者の最近の研究 [12] に基づき、非線形SOCPに対する2乗スラック変数法を紹介する。まず、次節では2次錐やジョルダン代数など、SOCPに関連する基礎的な事柄を説明する [4, 13]。つぎに、元の非線形SOCP問題のKarush-Kuhn-Tucker (KKT) 点

ふくだ えれん ひでみ  
京都大学大学院情報学専攻数理工学専攻  
〒606-8501 京都府京都市左京区吉田本町  
ふくしま まさお  
南山大理工学部システム数理学科  
〒489-0863 愛知県瀬戸市せいれい町27

と 2 乗スラック変数法によって再定式化された NLP 問題の KKT 点との関係を示す。また、制約想定について述べ、さらに 2 乗スラック変数法に関する数値結果も紹介する。

## 2. 2 次錐計画問題の基礎

本節では、SOCP に関連する基礎的事項を簡単に説明する。これらの事柄は、非線形 SOCP に限らず、線形 SOCP にも共通するものである。2 次錐やジョルダン代数、SOCP に関するより詳しい内容は、例えば [4] あるいは [13, 第 7 章] を参考にいただきたい。

### 2.1 2 次錐と 2 次錐計画問題

以下では、ベクトル  $z \in \mathbb{R}^\ell$  をしばしば

$$z := (z_0, \bar{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\ell-1}$$

と表す。非線形 SOCP とは、つぎの形をした 2 次錐制約条件をもつ最適化問題である。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x) \\ & \text{subject to} && g(x) \in \mathcal{K} \\ & && h(x) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 、 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  であり、 $\mathcal{K} := \mathcal{K}_1 \times \cdots \times \mathcal{K}_r$  は 2 次錐 (second-order cone) の直積、 $\mathcal{K}_i$  はそれぞれ  $m_i$  次元の 2 次錐、すなわち

$$\mathcal{K}_i := \begin{cases} \{(z_0, \bar{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m_i-1} : z_0 \geq \|\bar{z}\|\} & (m_i > 2) \\ \{z \in \mathbb{R} : z \geq 0\} & (m_i = 1) \end{cases}$$

で定義される集合である (図 1 参照)。ただし、 $m_1 + \cdots + m_r = m$  であり、 $\|\cdot\|$  はユークリッドノルムを表す。

関数  $f$ 、 $g$  がすべて線形るとき、問題 (1) はよく知られている線形 SOCP となる。また、すべての  $i$  に対して  $m_i = 1$  の場合、 $\mathcal{K}$  は  $m$  次元の非負錐 ( $\mathbb{R}_+^m$ ) であり、 $g(x) \in \mathcal{K}$  は  $g(x) \geq 0$ 、すなわち不等式制約条

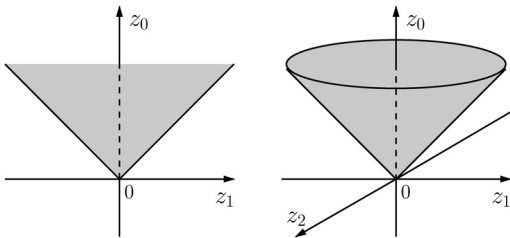


図 1 2 次元 (左) と 3 次元 (右) の 2 次錐

件となる。したがって、NLP と LP はそれぞれ非線形 SOCP と線形 SOCP の特殊な場合と見なすことができる。なお、後ほど説明するように、SOCP は SDP の特別な場合と見なされるが、計算コストを抑えるためには、SOCP を直接取り扱うことが望ましい。

### 2.2 例：凸 2 次制約の 2 次錐制約への変換

上に述べたように、不等式制約は 2 次錐制約の特殊な場合である。また、実際の最適化モデルでよく用いられる制約条件にも 2 次錐制約の形に変換できるものも少なくない (詳しくは [4, 2 節] を参照)。以下では、例として、つぎの凸 2 次制約条件が 2 次錐制約条件に変換できることを示そう。

$$\langle Qx, x \rangle + \langle q, x \rangle + r \leq 0 \quad (2)$$

ここで、 $q \in \mathbb{R}^n$ 、 $r \in \mathbb{R}$  であり、 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は半正定値対称行列とする。また、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は内積を表す。いま、 $Q$  のランクを  $k \leq n$  とすると、 $Q$  が半正定値対称行列であるから、 $Q = LL^T$  を満たすような行列  $L \in \mathbb{R}^{n \times k}$  が存在する。ただし、記号  $\top$  は行列やベクトルの転置を表している。したがって、式 (2) から

$$\begin{aligned} 0 & \geq \langle LL^T x, x \rangle + \langle q, x \rangle + r \\ & = \|L^T x\|^2 + (1 + \langle q, x \rangle + r)^2 / 4 \\ & \quad - (1 - \langle q, x \rangle - r)^2 / 4 \end{aligned} \quad (3)$$

が成り立つ。ここで、 $w = (w_0, \bar{w}) \in \mathbb{R}^{k+2}$  を

$$\begin{aligned} w_0 & := (1 - \langle q, x \rangle - r) / 2 \in \mathbb{R} \\ \bar{w} & := ((1 + \langle q, x \rangle + r) / 2, L^T x) \in \mathbb{R}^{k+1} \end{aligned}$$

と定義すれば、式 (3) は  $\|\bar{w}\|^2 - w_0^2 \leq 0$  と書け、さらにこの不等式は  $w_0 \geq \|\bar{w}\|$  となることが示せる。よって、式 (2) は  $w$  が  $k+2$  次元の 2 次錐に含まれることと等価である。

### 2.3 対称錐とジョルダン代数

SOCP の解析で重要なのが、ユークリッド的ジョルダン代数 (Euclidean Jordan algebra) (以下、単にジョルダン代数という) と呼ばれるものであり、それが対称錐という特別な錐に対応していることが知られている。有限次元ベクトル空間  $\mathbb{V}$  において、 $K \subset \mathbb{V}$  が対称錐 (symmetric cone) であるとは、 $K$  は自己双対錐 (すなわち  $K$  の双対錐  $K^* := \{z \in \mathbb{V} : \langle z, w \rangle \geq 0 (w \in K)\}$  が  $K$  自身に等しい) であり、さらに等質性と呼ばれる特別な性質を有することである。非負錐 ( $\mathbb{R}_+^m$ )、2 次錐 ( $\mathcal{K}$ )、半正定値錐 ( $\mathbb{S}_+^m$ ) はすべて対称錐であり、NLP、SOCP、SDP はジョルダン代数の枠組みで取り扱うこ

とができる。以下では、2次錐に対応するジョルダン代数を紹介する。

$\mathcal{K}$  を  $l$  次元の 2 次錐  $\{z \in \mathbb{R}^\ell : z_0 \geq \|\bar{z}\|\}$  とする。ベクトル  $w, z \in \mathbb{R}^\ell$  に対して、2 次錐  $\mathcal{K}$  に関するジョルダン積を

$$w \circ z := (\langle w, z \rangle, w_0 \bar{z} + z_0 \bar{w}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\ell-1}$$

で定義する。このジョルダン積は、つぎの命題に示すような、いくつかの性質を持つ。

**命題 2.1.** 任意のベクトル  $u, w, z \in \mathbb{R}^\ell$  に対して、

- (a)  $u \circ z = z \circ u$  (交換法則 1)
- (b)  $u \circ ((u \circ u) \circ z) = (u \circ u) \circ (u \circ z)$  (交換法則 2)
- (c)  $\mathbf{e} \circ u = u \circ \mathbf{e} = u$  (恒等元)
- (d)  $(w + u) \circ z = (w \circ z) + (u \circ z)$  (分配法則)
- (e)  $\langle w \circ u, z \rangle = \langle u \circ z, w \rangle = \langle w \circ z, u \rangle$  (内積)

が成り立つ。ここで、 $\mathbf{e} := (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^\ell$  は恒等元あるいは単位元と呼ばれるベクトルである。また、結合法則  $u \circ (w \circ z) = (u \circ w) \circ z$  は一般に成り立たない。

2 次錐  $\mathcal{K}$  に関するジョルダン積に関連して、ベクトル  $z \in \mathbb{R}^\ell$  に対する **Arrow** 行列を次式で定義する。

$$\text{Arw}(z) := \begin{bmatrix} z_0 & \bar{z}^\top \\ \bar{z} & z_0 I_{\ell-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$$

ここで、 $I_{\ell-1}$  は  $\ell-1$  次元の単位行列を表す。このとき、任意の  $w, z \in \mathbb{R}^\ell$  に対して、

$$w \circ z = \text{Arw}(z)w = \text{Arw}(w)z$$

が成立する。これは、Arrow 行列を使うことによって、ジョルダン積が通常の行列とベクトルの積で置き換えられることを意味している。さらに、 $\text{Arw}(z)$  が半正定値行列であることは  $z$  が 2 次錐  $\mathcal{K}$  に属することと等価であり、 $\text{Arw}(z)$  が正定値行列であることは  $z$  が  $\mathcal{K}$  の内部に含まれることと等価である。なぜならば、 $\text{Arw}(z)$  が半正定値であることは  $z = 0$  であること、もしくは  $z_0 > 0$  かつシュール補 (Schur complement) が非負 (すなわち  $z_0 - \bar{z}^\top (z_0 I_{\ell-1})^{-1} \bar{z} \geq 0$ ) であることと等価であるからである。また、2 次錐制約  $z \in \mathcal{K}$  を半正定値制約  $\text{Arw}(z) \in \mathbb{S}_+^\ell$  と書き換えると、SOCP を SDP として定式化できるので、SOCP は SDP の特殊な場合であることがわかる。

## 2.4 スペクトル分解

$\mathcal{K} = \{z \in \mathbb{R}^\ell : z_0 \geq \|\bar{z}\|\}$  とする。任意のベクトル  $z = (z_0, \bar{z}) \in \mathbb{R}^\ell$  に対して、 $\eta_1 := z_0 - \|\bar{z}\|$ ,  $\eta_2 := z_0 + \|\bar{z}\|$ ,

$$c^{(1)} := \begin{cases} (1/2)(1, -\bar{z}/\|\bar{z}\|) & (\bar{z} \neq 0) \\ (1/2)(1, -\bar{w}) & (\bar{z} = 0) \end{cases}$$

$$c^{(2)} := \begin{cases} (1/2)(1, \bar{z}/\|\bar{z}\|) & (\bar{z} \neq 0) \\ (1/2)(1, \bar{w}) & (\bar{z} = 0) \end{cases}$$

(ただし、 $\bar{w} \in \mathbb{R}^{\ell-1}$  は  $\|\bar{w}\| = 1$  を満たす任意のベクトル) とおけば、

$$z = \eta_1 c^{(1)} + \eta_2 c^{(2)} \quad (4)$$

と書くことができる。これをベクトル  $z$  の 2 次錐  $\mathcal{K}$  に関するスペクトル分解という。  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$  を  $z$  の固有値、ベクトル  $c^{(1)}, c^{(2)} \in \mathbb{R}^{\ell-1}$  を  $z$  の固有ベクトルという。さらに、集合  $\{c^{(1)}, c^{(2)}\}$  をベクトル  $z$  のジョルダンフレームといい、

- (a)  $c^{(1)} \circ c^{(2)} = 0$
- (b)  $c^{(1)} \circ c^{(1)} = c^{(1)}, c^{(2)} \circ c^{(2)} = c^{(2)}$
- (c)  $c^{(1)} + c^{(2)} = \mathbf{e}$
- (d)  $c^{(1)}, c^{(2)}$  は  $\mathcal{K}$  の境界  $\{z \in \mathbb{R}^\ell : z_0 = \|\bar{z}\|\}$  に含まれる

が成り立つ (図 2 参照)。明らかに、 $\eta_2 \geq \eta_1$  であり、特に  $\eta_1 \geq 0$  は  $z \in \mathcal{K}$  と等価である。つぎの命題が示すように、固有値  $\eta_1, \eta_2$  の符号によって、ベクトルが 2 次錐  $\mathcal{K}$  (あるいは  $-\mathcal{K}$ ) のどの部分に含まれているかわかる。ここで、 $\text{int}(\mathcal{K})$  は 2 次錐  $\mathcal{K}$  の内部、 $\text{bd}^+(\mathcal{K})$  は原点を除いた 2 次錐  $\mathcal{K}$  の境界を表す。明らかに、ベクトル  $z$  が  $\mathcal{K}$  に含まれるとき、 $z = 0, z \in \text{int}(\mathcal{K}), z \in \text{bd}^+(\mathcal{K})$  のいずれかが成立する。

**命題 2.2.** ベクトル  $z \in \mathbb{R}^\ell$  のスペクトル分解を式 (4) とするとき、つぎが成り立つ。

- (a)  $z = 0 \iff \eta_1 = 0, \eta_2 = 0$
- (b)  $z \in \text{bd}^+(\mathcal{K}) \iff \eta_1 = 0, \eta_2 > 0$
- (c)  $z \in \text{int}(\mathcal{K}) \iff \eta_1 > 0$

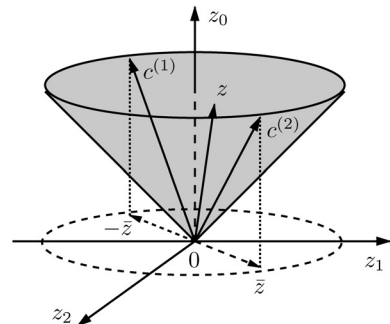


図 2 ベクトル  $z \in \mathbb{R}^3$  のスペクトル分解

$$(d) z \in \text{bd}^+(-\mathcal{K}) \iff \eta_1 < 0, \eta_2 = 0$$

$$(e) z \in \text{int}(-\mathcal{K}) \iff \eta_2 < 0$$

スペクトル分解は先ほど紹介した Arrow 行列とも関連する. 実際, 固有値  $\eta_1, \eta_2$  と固有ベクトル  $c^{(1)}, c^{(2)}$  は行列  $\text{Arw}(z)$  の固有値と固有ベクトルであり,  $\text{Arw}(z)$  の残りの  $(\ell - 2)$  個の固有値はすべて  $z_0$  である. この事実と命題 2.2(c) から, 前節でも述べたように,  $\text{Arw}(z)$  が正定値行列であることは  $z \in \text{int}(\mathcal{K})$  と等価であることがわかる.

行列のスペクトル分解 (固有値分解) と同様に, ベクトルの 2 次錐に関するスペクトル分解には重要な役割があり, それらを用いることによって, SOCP に関する解析が容易となる [14]. 例えば, ベクトル  $z$  のスペクトル分解を式 (4) とするとき, 2 次錐  $\mathcal{K}$  への射影は  $P_{\mathcal{K}}(z) := \max\{\eta_1, 0\}c^{(1)} + \max\{\eta_2, 0\}c^{(2)}$  となる. すなわち,  $z$  の固有値  $\eta_1, \eta_2$  を集合  $\mathbb{R}_+ = \{\eta \in \mathbb{R} : \eta \geq 0\}$  に射影することにより, ベクトルの 2 次錐への射影が簡単に得られる.

## 2.5 2 乗の錐

ジョルダン積を用いると, 2 次錐  $\mathcal{K} = \{z \in \mathbb{R}^\ell : z_0 \geq \|z\|\}$  はつぎの形で書ける (証明は [4, 4 節] を参照).

$$\mathcal{K} = \{z \circ z : z \in \mathbb{R}^\ell\}$$

このことから, 2 次錐はジョルダン積の意味での **2 乗の錐** (cone of squares) といわれる. SOCP に対する 2 乗スラック変数法は 2 次錐が 2 乗の錐であるという事実に基づいている.

通常の NLP で現れる非負錐も 2 乗の錐である. 実際, ベクトル  $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$  に対して,  $z \cdot z := (z_1^2, \dots, z_m^2) \in \mathbb{R}^m$  とすれば, 非負錐  $\mathbb{R}_+^m$  は  $\mathbb{R}_+^m = \{z \cdot z : z \in \mathbb{R}^m\}$  と表すことができる. さらに, SDP で現れる半正定値錐は  $\mathbb{S}_+^m = \{Z \circ Z : Z \in \mathbb{S}^m\}$  と表すことができるので, 同じく 2 乗の錐である. ただし,  $\mathbb{S}^m$  は対称行列全体の集合であり, ここでの記号  $\circ$  は半正定値錐に関するジョルダン積 (対称行列  $W, Z$  に対して,  $W \circ Z := (WZ + ZW)/2$  で定義される 2 項演算) を表している.

## 2.6 KKT 条件

問題 (1) の局所最適解を  $x \in \mathbb{R}^n$  とし, 目的関数  $f$  と制約関数  $g, h$  は  $x$  において連続的微分可能とする. さらに,  $g := (g_1, \dots, g_r), g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_i} (i = 1, \dots, r)$  と表す. そのとき, 適当な制約想定のもとで, 次式を満たすラグランジュ乗数  $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^m, \lambda_i \in \mathbb{R}^{m_i} (i = 1, \dots, r), \mu \in \mathbb{R}^p$  が存在する.

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = 0$$

$$h(x) = 0$$

$$\lambda_i \circ g_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, r)$$

$$g_i(x) \in \mathcal{K}_i \quad (i = 1, \dots, r)$$

$$\lambda_i \in \mathcal{K}_i \quad (i = 1, \dots, r)$$

このとき, 点  $(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{n+m+p}$  は問題 (1) の Karush–Kuhn–Tucker (KKT) 条件を満たす, あるいは問題 (1) の **KKT 点** と呼ばれる. ここで,

$$L(x, \lambda, \mu) := f(x) - \langle g(x), \lambda \rangle + \langle h(x), \mu \rangle$$

は問題 (1) のラグランジュ関数であり,

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = \nabla f(x) - \sum_{i=1}^r Jg_i(x)^\top \lambda_i + Jh(x)^\top \mu$$

はラグランジュ関数の  $x$  に関する勾配である. さらに,  $\nabla f(x)$  は  $f$  の勾配ベクトル,  $Jg_i(x), Jh(x)$  は  $g_i, h$  のヤコビ行列を表す.

KKT 条件は, 適当な制約想定のもとで, 最適性の必要条件となるため, アルゴリズム開発において重要な役割を果たす [15, 16]. 例えば, SOCP に対する内点法 [11, 13] では, 相補性条件  $\lambda_i \circ g_i(x) = 0 (i = 1, \dots, r)$  の代わりに, つぎの条件を用いる.

$$\lambda_i \circ g_i(x) = \rho \mathbf{e}_i \quad (i = 1, \dots, r) \quad (5)$$

ただし,  $\mathbf{e}_i := (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m_i}$  は  $m_i$  次元の単位元,  $\rho \in \mathbb{R}$  は非負のパラメータである. KKT 条件の相補性条件を (5) で置き換えたものは特にバリアー KKT 条件と呼ばれる. 内点法では, パラメータ  $\rho$  をゼロに近づけながらバリアー KKT 条件を近似的に満たす点をニュートン法を用いて計算することにより, 元の問題の KKT 点に収束する点列を生成する. また, SOCP の双対問題も SOCP であり, 特に非線形 SOCP に対する内点法 [11] では, 主双対変数の空間で直線探索法が用いられている.

## 3. 2 乗スラック変数法

本節では, [12] に基づき, 非線形 SOCP に対する 2 乗スラック変数法を説明する. ここでは, 記述を簡単にするため, 等式制約条件を含まない問題を考えるが, 以下に述べる結果は, 等式制約条件を含む問題に対しても同様に成り立つ. つぎの非線形 SOCP を考える.

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} && f(x) \\ & \text{subject to} && g(x) \in \mathcal{K} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \cdots \times \mathcal{K}_r$  は問題 (1) と同様であり、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  は 2 回連続的の微分可能な関数とする。また、2 次錐制約  $g(x) \in \mathcal{K}$  は  $g_i(x) \in \mathcal{K}_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) と等価であることに注意する。

2.5 節で述べたように、2 次錐はジョルダン積の意味での 2 乗の錐であるため、

$$\mathcal{K}_i = \{z \circ z: z \in \mathbb{R}^{m_i}\} \quad (i = 1, \dots, r) \quad (7)$$

と書ける。その事実から、変数  $y := (y_1, \dots, y_r) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) を導入すると、問題 (6) は

$$\begin{aligned} & \underset{x, y}{\text{minimize}} && f(x) \\ & \text{subject to} && g_i(x) - y_i \circ y_i = 0 \quad (i = 1, \dots, r) \end{aligned} \quad (8)$$

と変換できる。変数  $y$  はスラック変数であり、ここでは特に  $y_i$  の 2 乗 (すなわち、 $y_i \circ y_i$ ) を用いるため、この方法を **2 乗スラック変数法** という。また、再定式化した問題 (8) は通常の NLP であり、汎用の NLP ソルバーで解くことができる。以下では、問題 (6) を SOCP (6)、問題 (8) を NLP (8) と呼ぶ。

明らかに NLP (8) は SOCP (6) と等価である。より正確に言えば、 $x \in \mathbb{R}^n$  が SOCP (6) の大域的 (局所的) 最適解であれば、NLP (8) に対して  $(x, y)$  が大域的 (局所的) 最適解であるような  $y \in \mathbb{R}^m$  が存在する。さらに、 $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$  が NLP (8) の大域的 (局所的) 最適解であれば、 $x$  は SOCP (6) の大域的 (局所的) 最適解である。ただし、NLP に対する数値解法はふつう停留点 (KKT 点) を計算するように設計されているため、停留点に関する等価性を示す必要がある。しかし、SOCP (6) と NLP (8) の KKT 点の関係は大域的 (局所的) 最適解の問題のように明らかではない [3, 15]。3.1 節では、その KKT 点の等価性がある仮定のもとで成立することを示す。

まず、解析の準備として、SOCP (6) と NLP (8) の KKT 条件を示す。2.6 節に述べたように、 $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$  は以下の条件を満足するとき、SOCP (6) の KKT 点という。

$$\nabla f(x) - \sum_{i=1}^r Jg_i(x)^\top \lambda_i = 0 \quad (9)$$

$$\lambda_i \circ g_i(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, r) \quad (10)$$

$$g_i(x) \in \mathcal{K}_i \quad (i = 1, \dots, r) \quad (11)$$

$$\lambda_i \in \mathcal{K}_i \quad (i = 1, \dots, r) \quad (12)$$

NLP (8) については、

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) := f(x) - \sum_{i=1}^r \langle \lambda_i, g_i(x) - y_i \circ y_i \rangle$$

で定義されるラグランジュ関数に対して、 $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+2m}$  が以下の条件を満たすとき、NLP (8) の KKT 点という。

$$\nabla_{(x, y)} \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0 \quad (13)$$

$$g_i(x) - y_i \circ y_i = 0 \quad (i = 1, \dots, r) \quad (14)$$

ただし、 $\nabla_{(x, y)} \mathcal{L}(x, y, \lambda)$  はラグランジュ関数の  $(x, y)$  に関する勾配を表す。さらに、式 (13), (14) はつぎのように書き換えられる。

$$\nabla f(x) - \sum_{i=1}^r Jg_i(x)^\top \lambda_i = 0 \quad (15)$$

$$\lambda_i \circ y_i = 0 \quad (i = 1, \dots, r) \quad (16)$$

$$g_i(x) - y_i \circ y_i = 0 \quad (i = 1, \dots, r) \quad (17)$$

これを SOCP (6) の KKT 条件 (9)–(12) と比較すると、式 (9) と式 (15) は等価であり、さらに式 (7) から、式 (11) と式 (17) は等価であることがわかる。しかし、NLP (8) の KKT 条件 (15)–(17) には、ラグランジュ乗数  $\lambda_i$  が 2 次錐  $\mathcal{K}_i$  に含まれるという条件 (12) は存在しない。

SOCP (6) の KKT 点  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$ 、もしくは NLP (8) の KKT 点  $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+2m}$  に対して、いくつかの添字集合を定義する。

$$\mathcal{I}_0 := \{i \in \{1, \dots, r\}: g_i(x) = 0\}$$

$$\mathcal{I}_B := \{i \in \{1, \dots, r\}: g_i(x) \in \text{bd}^+(\mathcal{K}_i)\}$$

$$\mathcal{I}_I := \{i \in \{1, \dots, r\}: g_i(x) \in \text{int}(\mathcal{K}_i)\}$$

明らかに、集合  $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_B, \mathcal{I}_I$  は添字全体の集合  $\{1, \dots, r\}$  の分割である。さらに、つぎの添字集合を定義する。

$$\mathcal{I}_{00} := \{i \in \{1, \dots, r\}: g_i(x) = \lambda_i = 0\}$$

$$\mathcal{I}_{0I} := \{i \in \{1, \dots, r\}: g_i(x) = 0, \lambda_i \in \text{int}(\mathcal{K}_i)\}$$

$$\mathcal{I}_{0B} := \{i \in \{1, \dots, r\}: g_i(x) = 0, \lambda_i \in \text{bd}^+(\mathcal{K}_i)\}$$

$$\mathcal{I}_{B0} := \{i \in \{1, \dots, r\}: g_i(x) \in \text{bd}^+(\mathcal{K}_i), \lambda_i = 0\}$$

$$\mathcal{I}_{BB} := \{i \in \{1, \dots, r\}: g_i(x), \lambda_i \in \text{bd}^+(\mathcal{K}_i)\}$$

$$\mathcal{I}_{I0} := \{i \in \{1, \dots, r\}: g_i(x) \in \text{int}(\mathcal{K}_i), \lambda_i = 0\}$$

上に述べたように、NLP (8) の KKT 点においては、 $\lambda_i$  が  $\mathcal{K}_i$  に含まれていない可能性があるため、さらなる添字集合の定義が必要となる。

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{0N} &:= \{i \in \{1, \dots, r\} : g_i(x) = 0, \lambda_i \notin \mathcal{K}_i\} \\ \mathcal{I}_{BN} &:= \{i \in \{1, \dots, r\} : g_i(x) \in \text{bd}^+(\mathcal{K}_i), \lambda_i \notin \mathcal{K}_i\} \\ \mathcal{I}_{IN} &:= \{i \in \{1, \dots, r\} : g_i(x) \in \text{int}(\mathcal{K}_i), \lambda_i \neq 0\}\end{aligned}$$

ここで、明らかに  $\mathcal{I}_{00}, \mathcal{I}_{0I}, \mathcal{I}_{0B}, \mathcal{I}_{0N}$  は  $\mathcal{I}_0$  の分割であり、 $\mathcal{I}_{I0}, \mathcal{I}_{IN}$  は  $\mathcal{I}_I$  の分割である。また、 $\mathcal{I}_{B0}, \mathcal{I}_{BB}, \mathcal{I}_{BN}$  は  $\mathcal{I}_B$  の分割である（証明は、[12, 2節]を参照）。これらの添字集合のうち、特に  $\mathcal{I}_0$  と  $\mathcal{I}_B$  は通常のNLPにおける有効制約集合 (active set) に対応するものであるが、SOCPの場合、2次錐制約の構造上、より複雑な分類が必要となる。

### 3.1 KKT点についての考察

ここでは、SOCP (6) と NLP (8) の KKT 点の等価性について述べる。より詳しい説明は [12, 3節] を参考にさせていただきたい。つぎの命題は比較的簡単に示すことができる。

**命題 3.1.**  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$  を SOCP (6) の KKT 点とする。そのとき、 $(x, y, \lambda)$  が NLP (8) の KKT 点であるような  $y \in \mathbb{R}^m$  が存在する。

NLP (8) の KKT 点、すなわち式 (15)–(17) を満たす点はラグランジュ乗数  $\lambda_i$  が 2次錐  $\mathcal{K}_i$  に含まれていない可能性がある。そのため、上の命題の逆は成立するとは限らない。しかし、NLP (8) の 2次の十分条件 (second-order sufficient condition) ([15, 16] 参照) を仮定すれば、逆も成立することがいえる。

**補題 3.2.** NLP (8) の KKT 条件 (15)–(17) を満たす  $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+2m}$  に対して、

$$\begin{aligned}C(x) &:= \{(v, w) \in \mathbb{R}^{n+m} : Jg_i(x)v = 0 \ (i \in \mathcal{I}_0), \\ &\quad Jg_i(x)v - 2y_i \circ w_i = 0 \ (i \in \mathcal{I}_I \cup \mathcal{I}_B)\}\end{aligned}$$

と定義する。そのとき、ゼロでない任意の  $(v, w) \in C(x)$  に対して、

$$\langle \nabla_x^2 L(x, \lambda)v, v \rangle + 2 \sum_{i=1}^r \langle w_i \circ w_i, \lambda_i \rangle > 0$$

が成り立てば、KKT 点  $(x, y, \lambda)$  は NLP (8) の 2次の十分条件を満たす。ただし、

$$\nabla_x^2 L(x, \lambda) = \nabla^2 f(x) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_{i,j} \nabla^2 g_{i,j}(x)$$

は SOCP (6) のラグランジュ関数の  $x$  に関するヘッセ行列であり、さらに  $g_i(x) := (g_{i,1}(x), \dots, g_{i,m_i}(x)) \in$

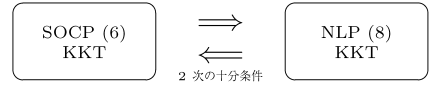


図 3 命題 3.1 と命題 3.3 の結果

$\mathbb{R}^{m_i}, \lambda_i = (\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i}$  である。

**命題 3.3.**  $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+2m}$  は NLP (8) の KKT 点であり、さらに 2次の十分条件を満たすとす。そのとき、 $(x, \lambda)$  は SOCP (6) の KKT 点である。

命題 3.1 と命題 3.3 から、NLP (8) の 2次の十分条件の仮定のもとで、SOCP (6) と NLP (8) の KKT 点は等価であることがわかる (図 3 参照)。さらなる解析として、命題 3.3 に新たな仮定を追加すると、SOCP (6) の KKT 点は (SOCP の) 2次の十分条件を満たす。

**定義 3.4.** SOCP (6) の KKT 条件 (9)–(12) を満たす  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$  に対して、 $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(g(x))$  を 2次錐  $\mathcal{K}$  の点  $g(x)$  における接錐とし、

$$\begin{aligned}C(x) &:= \{d \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla f(x), d \rangle = 0, \\ &\quad Jg(x)d \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}(g(x))\},\end{aligned}$$

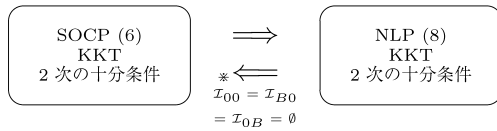
$$H_i(x, \lambda) := -\frac{\lambda_{i0}}{g_{i0}(x)} Jg_i(x)^\top \begin{bmatrix} 1 & 0^\top \\ 0 & -I_{m_i-1} \end{bmatrix} Jg_i(x)$$

と定義する。そのとき、ゼロでない任意の  $d \in C(x)$  に対して、

$$\left\langle \left( \nabla_x^2 L(x, \lambda) + \sum_{i \in \mathcal{I}_{BB}} H_i(x, \lambda) \right) d, d \right\rangle > 0$$

が成り立てば、KKT 点  $(x, \lambda)$  は SOCP の 2次の十分条件を満たすという。

命題 3.3 に追加する新たな仮定とは、NLP (8) の KKT 点において、添字集合  $\mathcal{I}_{00}, \mathcal{I}_{B0}, \mathcal{I}_{0B}$  がすべて空となることである。実際、それぞれの添字集合が空でない場合、NLP (8) の 2次の十分条件は成立しない可能性がある。例えば、 $r = 1, \mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_{00} = \{1\}$ 、すなわち  $g_1(x) = \lambda_1 = 0$  とする。このとき、補題 3.2 から、2次の十分条件は『 $Jg_1(x)v = 0$  を満足するゼロでない任意の  $(v, w_1) \in \mathbb{R}^{n+m_1}$  に対して、 $\langle \nabla_x^2 L(x, \lambda)v, v \rangle > 0$  が成り立つ』と書ける。しかし、 $v = 0$  かつ  $w_1 \neq 0$  であるようなベクトル  $(v, w_1)$  はこの条件を満たさないため、2次の十分条件は成立しない。また、添字集合  $\mathcal{I}_{B0}$ 、



\* 狭義相補性も成り立つ

図4 定理3.6と定理3.7の結果

$\mathcal{I}_{0B}$  が空でないときも同様な例が存在する [12, 3 節]. したがって,  $\mathcal{I}_{00}, \mathcal{I}_{B0}, \mathcal{I}_{0B}$  がすべて空という仮定が必要となる. そのような仮定を用いると, SOCP (6) の2次の十分条件だけでなく, 狭義相補性も成立することがいえる.

**定義 3.5.** SOCP (6) の KKT 点  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$  が次式を満たすとき狭義相補性 (strict complementarity) が成り立つという.

$$g_i(x) + \lambda_i \in \text{int}(\mathcal{K}_i) \quad (i = 1, \dots, r)$$

**定理 3.6.**  $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+2m}$  を NLP (8) の KKT 点とする. さらに, 2次の十分条件と  $\mathcal{I}_{00} = \mathcal{I}_{B0} = \mathcal{I}_{0B} = \emptyset$  が成り立つならば,  $(x, \lambda)$  は SOCP (6) の2次の十分条件と狭義相補性を満たす KKT 点である.

ここで, 命題3.1へ戻り, SOCP (6) の KKT 点において2次の十分条件を仮定する. そのとき, NLP (8) の KKT 点は狭義相補性のような仮定なしで2次の十分条件を満足する.

**定理 3.7.**  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$  を SOCP (6) の2次の十分条件を満たす KKT 点とする. そのとき,  $(x, y, \lambda)$  が NLP (8) の KKT 点であるような  $y \in \mathbb{R}^m$  が存在し, 2次の十分条件が成り立つ.

### 3.2 制約想定についての考察

KKT 条件が最適性の必要条件となるためには, 制約想定と呼ばれる条件が成り立たなければならない. したがって, 前節の結果に加え, SOCP (6) と NLP (8) の制約想定の特価性を証明する必要がある. NLP に対する様々な制約想定の中, 最もよく知られているのは1次独立制約想定 (linear independence constraint qualification) である [15, 16]. ある点が1次独立制約想定を満たすとは, 等式制約および有効 (active) な不等式制約の勾配ベクトルが1次独立であることである. NLP (8) の場合, 点  $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}$  が1次独立制約想定を満たすことは, つぎの行列がフルランクであることと特価である.

$$\begin{bmatrix} Jg_1(x) & -2\text{Arw}(y_1) & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ Jg_r(x) & 0 & 0 & -2\text{Arw}(y_r) \end{bmatrix}$$

SOCP (6) は NLP (8) と違い, 非線形 SOCP であり, つぎのような制約想定が存在する.

**定義 3.8.** SOCP (6) の実行可能解  $x \in \mathbb{R}^n$  に対して, 以下のベクトル

$$Jg_i(x)^\top \begin{bmatrix} 1 & 0^\top \\ 0 & -I_{m_i-1} \end{bmatrix} g_i(x) \quad (i \in \mathcal{I}_B),$$

$$\nabla g_{i,j}(x) \quad (j = 1, \dots, m_i, i \in \mathcal{I}_0)$$

が1次独立であれば,  $x$  は非退化 (nondegenerate) であるという.

実際, 非退化性は1次独立制約想定性を一般化した制約想定として知られている [17, 18]. 以下では, SOCP (6) と NLP (8) の制約想定の特価性について述べる.

**定理 3.9.**  $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+2m}$  を NLP (8) の KKT 点とする. 2次の十分条件と1次独立制約想定が成り立つとき,  $(x, \lambda)$  は SOCP (6) の非退化な KKT 点である.

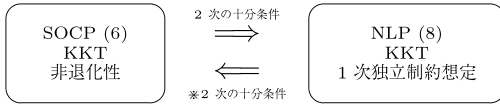
上の定理では, NLP (8) の2次の十分条件を仮定しているが, それは KKT 点に関する証明 (命題3.3) で必要である. また, 定理3.9の逆は成り立たない可能性がある. より正確に言えば, SOCP (6) が特に NLP であれば, つまり  $\mathcal{K} = \mathbb{R}_+^m$  であれば, 逆も成り立つことがわかる. しかし, 一般の非線形 SOCP の場合, つぎの反例が示すように, 定理の逆は成立するとは限らない.

**例 3.10.** SOCP (6) において,  $r = 1, n = 3, m = m_1 = 3$  とし, 関数  $f$  と  $g$  は次式で与えられるとする.

$$f(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$g(x) = g_1(x) := \begin{pmatrix} 2 + x_1 \\ x_1 - x_2^2 \\ -x_1 + x_3^3 \end{pmatrix}$$

$x^* = (0, 0, 0), \lambda^* = (0, 0, 0), y^* = (0, 1, -1)$  とすると,  $(x^*, \lambda^*)$  は SOCP (6) の KKT 点であり,  $(x^*, y^*, \lambda^*)$  は NLP (8) の KKT 点である. この場合,



\* 図 3 より, KKT 点であるために必要

図 5 定理 3.9 と定理 3.11 の結果

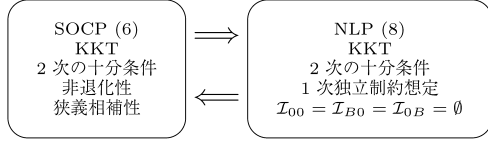


図 6 定理 3.11 と定理 3.12 の結果

SOCP (6) の非退化性は成り立つが, NLP (8) の 1 次独立制約想定は成り立たない.

以上で述べたように, 定理 3.9 の逆は成り立たない可能性があるが, 定理 3.7 のように, 2 次の十分条件を仮定すると成立する.

**定理 3.11.**  $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+m}$  を SOCP (6) の 2 次の十分条件と非退化性を満たす KKT 点とする. そのとき,  $(x, y, \lambda)$  が NLP (8) の KKT 点であるような  $y \in \mathbb{R}^m$  が存在し, 2 次の十分条件と 1 次独立制約想定が成り立つ. さらに,  $(x, \lambda)$  が狭義相補性を満たすとき,  $(x, y, \lambda)$  において  $\mathcal{I}_{00} = \mathcal{I}_{B0} = \mathcal{I}_{0B} = \emptyset$  が成立する.

最後に, 定理 3.6 と定理 3.9 からつぎの結果を得る.

**定理 3.12.**  $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^{n+2m}$  を NLP (8) の KKT 点とする. さらに, 2 次の十分条件, 1 次独立制約想定と  $\mathcal{I}_{00} = \mathcal{I}_{B0} = \mathcal{I}_{0B} = \emptyset$  が成り立つと仮定する. そのとき,  $(x, \lambda)$  は SOCP (6) の KKT 点であり, 2 次の十分条件, 非退化性と狭義相補性が成り立つ.

### 3.3 数値実験

参考文献 [12, 5 節] の数値実験ではいくつかの SOCP (特に非凸な SOCP) を 2 乗スラック変数法を用いて解いた. 問題はすべて AMPL [19] でモデリングし, ALGENCAN [20] という Fortran 言語で実装された拡張ラグランジュ法の NLP ソルバーを使用した. さらに, 解の妥当性を確認するため, 非線形 SOCP に対する正確なペナルティ法 [7] を用いた. ここでは, 例として, つぎの非凸な問題に対する計算結果を示す.

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} && \langle Cx, x \rangle + \sum_{i=1}^n (p_i x_i^4 + q_i x_i) \\ & \text{subject to} && A_i x + b_i \in \mathcal{K}_i \quad (i = 1, \dots, r) \end{aligned} \quad (18)$$

表 1 非凸な SOCP での数値実験: 外部反復の回数

$\mathcal{K}$	外部反復		
	メディアン	最小値	最大値
$\mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^5$	7	6	9
$\mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^{20}$	7	6	8
$\mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^{20} \times \mathcal{K}^{20}$	7	7	7

表 2 非凸な SOCP での数値実験: 内部反復の回数

$\mathcal{K}$	内部反復		
	メディアン	最小値	最大値
$\mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^5$	84.5	53	581
$\mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^{20}$	162.5	91	1291
$\mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^{20} \times \mathcal{K}^{20}$	231.5	175	2316

ただし,  $p_i, q_i \in \mathbb{R} (i = 1, \dots, n)$ ,  $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}^{m_i} (i = 1, \dots, r)$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \dots \times \mathcal{K}_r$ ,  $m_1 + \dots + m_r = n$  である. さらに, 実数  $p_i, q_i$  と行列  $A_i$  の要素はそれぞれ  $[0, 1]$ ,  $[-1, 1]$ ,  $[0, 2]$  の区間からランダムに選ぶ. 行列  $C$  は不定値対称行列とし, その要素は区間  $[-1, 1]$  からランダムに選択する. また, ベクトル  $b_i$  は  $b_{i0} = 1$  かつ  $\bar{b}_i = 0$  と定める. よって,  $x = 0$  は常に問題 (18) の実行可能解である.

問題 (18) の制約条件の数は選択可能であり, 例えば  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^5 (n = 10)$ ,  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^{20} (n = 30)$ ,  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^5 \times \mathcal{K}^{20} \times \mathcal{K}^{20} (n = 50)$  とし<sup>1</sup>, 実験を行う. したがって, スラック変数を導入した NLP 問題の変数の次元はそれぞれ 20, 60, 100 となる. 各 2 次錐  $\mathcal{K}$  に対し, 10 個の問題をランダムに選択し, ランダムな初期点から 2 乗スラック変数法で解いてみる. ここで用いるソルバー ALGENCAN は拡張ラグランジュ法なので, 外部反復でペナルティパラメータやラグランジュ乗数を更新し, 内部反復で制約なし, もしくはボックス制約のみの部分問題を解くことになる. 表 1 と表 2 はそれぞれ外部反復と内部反復の回数のメディアン, 最小値, 最大値を示している.

2 乗スラック変数法を用いて, すべての問題の解が求められ, さらに正確なペナルティ法で得られた解とほとんどの場合一致した. 正確なペナルティ法で得られた解と違う解が求められたときでも, その解が少なくとも KKT 点であることを確認した. ここで興味深い事実は, 30 個中 23 個の問題において, ALGENCAN を用いた 2 乗スラック変数法が正確なペナルティ法より早く解に収束したことである. 2 乗スラック変数法

<sup>1</sup> ここで,  $\mathcal{K}^\ell$  は  $\ell$  次元の 2 次錐を表し, 直積  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \dots \times \mathcal{K}_r$  の  $\ell$  番目の 2 次錐  $\mathcal{K}_\ell$  と異なることに注意する.



は、変数の数が2倍（すなわち  $2n$ ）であるにもかかわらず、 $n$ 次元の問題を直接取り扱う正確なペナルティ法より効率的であった。したがって、変数の数が増加しても、開発が進んでいる汎用のNLPソルバーのほうが、非線形SOCPのソルバーよりも良い結果を得る可能性がある。

上記の数値実験に加え、[12, 5節]の数値実験から、2乗スラック変数法によって非線形SOCPを効率的に解けることがわかる。しかし、NLPに対する2乗スラック変数法と同様に、SOCPに対する2乗スラック変数法も数値的な不安定性や特異性を引き起こす可能性がある。そのことを考慮しても、2乗スラック変数法は容易に用いることができるので、現在開発が十分でない非線形SOCP（特に非凸なSOCP）に対して、試す価値がある手法と考えられる。

#### 4. おわりに

本稿では、2次錐やジョルダン代数に関する説明をしたあと、非線形SOCPに対する2乗スラック変数法を紹介した。非線形SOCPのKKT点とNLPとして再定式化された問題のKKT点は、2次の十分条件のもとで等価であることがわかり、制約想定についても同様な結果を得た。しかし、通常のNLPの場合と異なり、SOCPの構造的特徴から、それらの証明は複雑になる（詳しくは[12]参照）。

2乗スラック変数法はNLPや非線形SOCPだけでなく、非線形SDPにも適用可能である。それは、半正定値錐が非負錐や2次錐と同じように対称錐（2乗の錐）だからである。また、SOCPと同様、SDPに関する従来の研究は線形の場合がほとんどであるため、2乗スラック変数法は非線形SDPにおいても興味深いといえる。しかし、現時点では、理論解析は非線形SOCPの場合にしかされておらず、非線形SDPについては今後の研究課題である。

**謝辞** 本稿を執筆する機会を与えてくださった村松正和先生に感謝いたします。

#### 参考文献

- [1] E. Spedicato, “On a Newton-like method for constrained nonlinear minimization via slack variables,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, **36**, 175–190, 1982.
- [2] R. A. Tapia, “A stable approach to Newton’s method for general mathematical programming problems in  $\mathbb{R}^n$ ,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, **14**, 453–476, 1974.
- [3] R. A. Tapia, “On the role of slack variables in quasi-Newton methods for constrained optimization,” *Numerical Optimisation of Dynamic Systems*, L. C. W. Dixon and G. P. Szegö (eds.), North-Holland Publishing Company, pp. 235–246, 1980.
- [4] F. Alizadeh and D. Goldfarb, “Second-order cone programming,” *Mathematical Programming*, **95**, 3–51, 2003.
- [5] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [6] M. S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd and H. Lebret, “Applications of second-order cone programming,” *Linear Algebra and Its Applications*, **284**, 193–228, 1998.
- [7] E. H. Fukuda, P. J. S. Silva and M. Fukushima, “Differentiable exact penalty functions for nonlinear second-order cone programs,” *SIAM Journal on Optimization*, **22**, 1607–1633, 2012.
- [8] C. Kanzow, I. Ferenczi and M. Fukushima, “On the local convergence of semismooth Newton methods for linear and nonlinear second-order cone programs without strict complementarity,” *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 297–320, 2009.
- [9] H. Kato and M. Fukushima, “An SQP-type algorithm for nonlinear second-order cone programs,” *Optimization Letters*, **1**, 129–144, 2007.
- [10] Y. Z. Liu and L. W. Zhang, “Convergence of the augmented Lagrangian method for nonlinear optimization problems over second-order cones,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, **139**, 557–575, 2008.
- [11] H. Yamashita and H. Yabe, “A primal-dual interior point method for nonlinear optimization over second-order cones,” *Optimization Methods & Software*, **24**, 407–426, 2009.
- [12] E. H. Fukuda and M. Fukushima, “The use of squared slack variables in nonlinear second-order cone programming,” (submitted)
- [13] 小島政和, 土谷隆, 水野真治, 矢部博, 『内点法』, 朝倉書店, 2001.
- [14] M. Fukushima, Z.-Q. Luo and P. Tseng, “Smoothing functions for second-order cone complementarity problems,” *SIAM Journal on Optimization*, **12**, 436–460, 2001.
- [15] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, Athena Scientific, 1999.
- [16] 福島雅夫, 『非線形最適化の基礎』, 朝倉書店, 2001.
- [17] J. F. Bonnans and H. Ramírez C., “Perturbation analysis of second-order cone programming problems,” *Mathematical Programming*, **104**, 205–227, 2005.
- [18] J. F. Bonnans and A. Shapiro, *Perturbation Analysis of Optimization Problems*, Springer-Verlag, 2000.
- [19] R. Fourer, D. M. Gay and B. W. Kernighan, “A modeling language for mathematical programming,” *Management Science*, **36**, 519–554, 1990.
- [20] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez and M. L. Schuverdt, “Augmented Lagrangian methods under the constant positive linear dependence constraint qualification,” *Mathematical Programming*, **111**, 5–32, 2008.