Properties and Computation of a Solution for Cost Allocation Games on Intersecting Families

五十嵐　歩美

筑波大学大学院システム情報工学研究科社会システム工学専攻
（現所属：University of Oxford, Computer Science）
指導教員：山本芳嗣 教授

1. 背景

古典的な協力ゲームの理論では，あらゆるプレイヤーの組合せが提携を組めることを仮定していた．しかし，現実には国家間の提携可能性のように，政治的な制約などにより，そのような仮定は成立し難い．そこで近年，ある公理を満たす集合族を用いてプレイヤー間の提携可能性を表現する協力ゲームについて盛んに研究がなされるようになった．ここでの**ゲーム**Γは，プレイヤー集合 $N := \{1, 2, \cdots, n\}$，許容提携の集合 $\mathcal{F} \subseteq 2^N$，費用関数 $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ により，$\Gamma \equiv (N, \mathcal{F}, c)$ と定義され[1]，全体でかかる費用 $c(N)$ をどのように分担するかが問題となる．$\mathcal{F} = 2^N$ を満たすゲームが，古典的な枠組におけるゲームに対応する．これまでに，凸幾何，増加システムなどの集合族上でのゲームが提案されており，古典的な協力ゲーム理論では不可能であった広範な問題の記述が可能になった．しかし，古典的な枠組における仮定を緩和することによってある問題が生じる．古典的な協力ゲームの理論では，2^N 上の費用関数 c の劣モジュラ性を仮定して，配分方法の特徴付けを行っている．費用関数 $c : 2^N \to \mathbb{R}$ が劣モジュラであるとは，任意の $S, T \in 2^N$ に対して，

$$c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) + c(S \cap T) \qquad (1.1)$$

を満たすことをいう．一方，許容される提携の集合を N の部分集合族 $\mathcal{F}$ で与えた場合，費用関数 c は $\mathcal{F}$ 上の関数となるが，集合族 $\mathcal{F}$ は必ずしも和と共通部分に関して閉じているとは限らず，古典的な枠組みにおける劣モジュラ性の定義をそのまま適用できない．

本研究では，部分的な劣モジュラ性を持つ費用関数を導入し，交差族[2]と呼ばれる集合族上のゲームの性質について考察した．本研究の主な結果は以下の二つである．第一に，交差族が，費用関数を分配束[3]上の劣モジュラ関数に拡張するための，ある意味で最も広いクラスであることを示した．第二に，交差族上の劣モジュラゲームにおいて，コアと安定集合との関係を明らかにし，仁の多項式時間可解性を示した．

2. 費用関数の拡張

はじめに，費用関数の劣モジュラ性について考察する．本研究では，二つの費用関数に着目する．一つ目は，限定的な劣モジュラ性を持つ準劣モジュラ関数である．$\Gamma \equiv (N, \mathcal{F}, c)$ をゲームとする．$S \cup T, S \cap T \in \mathcal{F}$ を満たす任意の $S, T \in \mathcal{F}$ に対して，式 (1.1) が成立するとき，費用関数 $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ は**準劣モジュラ**であると呼ぶ [1]．二つ目は，費用関数 $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ の拡張である．費用関数 $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ に対して，その拡張 $\hat{c} : \hat{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$ を以下のとおりに定義する．まず，$\hat{\mathcal{F}}$ については，$\mathcal{F}$ の要素の直和を考え，それらをすべて集めた集合を $\hat{\mathcal{F}}$ とする．さらに，各 $\hat{\mathcal{F}}$ の非空な要素 X に対して，

$$\hat{c}(X) := \min\{ \sum_{i \in I} c(X_i) \mid \{X_i\}_{i \in I} : X \text{ の分割}, \; X_i \in \mathcal{F}, \forall i \in I \}$$

と定義し，$\hat{c}(\emptyset) = 0$ とする．費用関数 $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ が交差族上の準劣モジュラ関数のとき，次の定理から，その拡張 $\hat{c} : \hat{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$ も準劣モジュラ関数になる．

定理 2.1 ([2])**.** 交差族 $\mathcal{F}$ 上の費用関数 $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ に対して，共通部分が非空な任意の $S, T \in \mathcal{F}$ において，式 (1.1) が成り立つとする．このとき，任意の $S, T \in \hat{\mathcal{F}}$ に対して，$\hat{c}(S) + \hat{c}(T) \geq \hat{c}(S \cup T) + \hat{c}(S \cap T)$ が成り立つ．

[1] 本研究では，$N, \emptyset \in \mathcal{F}$, $c(\emptyset) = 0$ を仮定する．

[2] 共通部分が非空な任意の $S, T \in \mathcal{F}$ に対して，$S \cup T, S \cap T \in \mathcal{F}$ を満たす有限集合の部分集合族 $\mathcal{F}$ を**交差族**と呼ぶ．

[3] 本稿では，分配束とは有限集合の部分集合族 $\mathcal{F}$ で，任意の $S, T \in \mathcal{F}$ に対して，$S \cup T, S \cap T \in \mathcal{F}$ を満たすものとする．

拡張した関数の劣モジュラ性を仮定すると，配分方法の特徴付けが容易になるのでこの性質は好ましい．しかし，一般には元の費用関数の劣モジュラ性から拡張した関数の劣モジュラ性を導くことはできない．そこで，本研究では劣モジュラ性を壊さずに準劣モジュラ関数から劣モジュラ関数へ拡張可能な集合族のクラスを考察し，以下の定理を得た．

定理 2.2. 任意の $i \in N$ について $\{i\} \in \mathcal{F}$ が成り立つとする．このとき，$\mathcal{F}$ 上の任意の準劣モジュラな費用関数 $c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ について，その拡張 $\hat{c} : \hat{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$ が準劣モジュラならば，$\mathcal{F}$ は交差族である．

3. コアと安定集合

定理 2.1 の性質を利用して交差族上のコアと安定集合の関係について考察する．ゲーム $\Gamma \equiv (N, \mathcal{F}, c)$ に対して，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$ かつ $\{i\} \in \mathcal{F}$ となる任意の $i \in N$ について，$x_i \leq c(\{i\})$ を満たすとき，$\boldsymbol{x}$ を Γ の配分と呼ぶ．今，配分 $\boldsymbol{x}$ と許容提携 $S \in \mathcal{F}$ が与えられている．差分 $c(S) - \sum_{i \in S} x_i$ が負になるとき，S のメンバーにとっては，$\boldsymbol{x}$ に従わず S の中で提携を組み，費用を分担するほうが望ましいことがわかる．コアとは，すべての許容提携がこの逸脱の動機を持たない配分の集合のことである．すなわち，任意の許容提携 $S \in \mathcal{F}$ に対して，$c(S) - \sum_{i \in S} x_i \geq 0$ を満たす配分 $\boldsymbol{x}$ の集まりがゲーム Γ のコアである．コアはいくつかの望ましい性質を持つことが知られているが，なかでも古典的な枠組における劣モジュラゲームにおいて，コアは唯一の安定集合[4]であることが示されている [3]．

本研究では，Shapley [3] の結果を分配束上の劣モジュラゲームにおけるコアにも拡張することができることを示し，さらに，コアがゲーム $\Gamma \equiv (N, \mathcal{F}, c)$ で安定集合であることとその拡張 $\hat{\Gamma} \equiv (N, \hat{\mathcal{F}}, \hat{c})$ で安定集合であることは同値となることを示した．これらの事実と，定理 2.1 から，以下の結果が得られる．

定理 3.1. ゲーム $\Gamma \equiv (N, \mathcal{F}, c)$ に対して，$c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ が交差族上の準劣モジュラ関数であり，$\hat{\mathcal{F}}$ の任意の極大鎖の長さが n であるとする．このとき，ゲーム Γ のコアは唯一の安定集合である．

4. 仁を計算する多項式時間アルゴリズム

コアの要素 $\boldsymbol{x}$ によっては，費用の節減分 $c(S) - \sum_{i \in S} x_i$ が許容提携 $S \in \mathcal{F}$ ごとに大きく異なり，不公平な配分になる場合もある．これにより考えられたのが仁である．仁は，各提携の費用の節減分をできるだけ大きく，かつ均等にした配分方法である．定義は [4] を参照されたい．

一般に仁の計算は NP 困難であることが知られているが，Faigle 他 [4] は $\mathcal{F} = 2^N$ の劣モジュラゲームにおいて，仁の多項式時間可解性を示した．さらに，Hoang [5] は，仁を求める解法として，許容提携の集合が foursome という条件を満たす劣モジュラゲームにおいて，線形計画問題を繰り返し解く多項式時間アルゴリズムを与えた．しかし，集合族が foursome という仮定を現実問題に適用することは難しく，また本研究から，Faigle 他 [4] における仮定と数学的な構造上変わりがないことがわかった．本研究では，Hoang [5] の結果を拡張し，許容提携の集合が交差族である準劣モジュラゲームにおいて，仁が多項式時間で求められることを示した．

定理 4.1. ゲーム $\Gamma \equiv (N, \mathcal{F}, c)$ に対して，$c : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ が交差族上の準劣モジュラ関数であり，任意の $i \in N$ について $\{i\} \in \mathcal{F}$ が成り立つとする．このとき，ゲーム Γ の仁を計算する多項式時間アルゴリズムが存在する．

参考文献

[1] J. M. Bilbao, E. Lebrón and N. Jiménez, “The core of games on convex geometries,” *European Journal of Operational Research*, **119**, 365–372, 1999.

[2] U. Faigle, “Cores of games with restricted cooperation,” *ZOR - Methods and Models of Operations Research*, **33**, 405–422, 1989.

[3] L. S. Shapley, “Cores of convex games,” *International Journal of Game Theory*, **1**, 11–26, 1971.

[4] U. Faigle, W. Kern and J. Kuipers, “On the computation of the nucleolus of a cooperative game,” *International Journal of Game Theory*, **30**, 79–98, 2001.

[5] N. D. Hoang, “Algorithmic cost allocation games: Theory and applications,” PhD Thesis, TU Berlin, 2010.

[4] 配分 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して，$y(S) \geq c(S)$ かつ，任意の $i \in S$ について $y_i < x_i$ を満たす $S \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ が存在するとき，配分 $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{x}$ を**支配する**という．配分集合 K がゲーム $\Gamma \equiv (N, \mathcal{F}, c)$ の**安定集合**であるとは，以下の二つの安定性を満たすことをいう：
（内部安定性） 任意の配分 $\boldsymbol{x} \in K$ に対して，$\boldsymbol{x}$ を支配する $\boldsymbol{y} \in K$ が存在しない，
（外部安定性） 任意の配分 $\boldsymbol{x} \notin K$ に対して，$\boldsymbol{x}$ を支配する $\boldsymbol{y} \in K$ が存在する．