

集合・関数・グラフ理論の記法の手ほどき

—美術館定理を通じて—

宮本 裕一郎

この記事は、オペレーションズ・リサーチの中でも特に組合せ最適化、あるいは離散アルゴリズムでよく用いられるグラフ理論の記法の手ほどきを目的としている。グラフ理論の記法では、集合や関数の使い方が重要である。よって、まず集合や関数についても少しだけ紹介した後に、グラフ理論の初歩を紹介する。そして、グラフ理論の記法の使い方の例として美術館定理を扱う。高校数学程度の論理的議論はできるがグラフ理論の数理的記述には慣れていないという読者を想定している。

キーワード：集合、関数、グラフ理論、頂点彩色、美術館定理

1. はじめに

筆者が好きな分野である組合せ最適化では、複雑な数式を見かけることは少ない。計算という意味では、足し算と引き算くらいしか使わず、割り算ですら減多に使わない。三角関数や微分積分に至っては……そんな私がオペレーションズ・リサーチで役に立つ数学を解説するとは笑止千万である。しかし、そんな私でも頻繁に使う数理的なものがある。それが、集合や関数やグラフ理論の記法による記述である。

この記事は、オペレーションズ・リサーチの中でも特に組合せ最適化、あるいは離散アルゴリズムでよく用いられる集合・関数・グラフ理論の記法の手ほどきを目的としている。当該分野の専門的な文献は、それらの記法は知っているという前提で書かれている場合が多く、そこで面食らう初学者も多いと思われる。

「オペレーションズ・リサーチ、さらには情報系の分野におけるアイデアを正確に記述するために必要なのだ」という意識は希薄なまま、集合・関数の勉強を素通りしてしまった方もいると思う。少なくとも私はそうである。意識が希薄であったかつての自分に教えると想定して、初学者の方のために解説したい。

なお、単に記法を羅列するだけでは無味乾燥に感じられるかもしれないので、以下の美術館監視問題を考える。

美術館監視問題

平屋建ての美術館がある。美術館の平面図は多角形になっており、中庭などはない。この美術館に監視カメラを設置したい。監視カメラは設置箇所から全方位を監視可能であり、壁で遮られなければ十分遠くまで監視できる。美術館内のすべてを監視するには、監視カメラを何台調達すればよいであろうか？

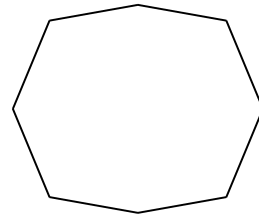


図1 八角美術館

美術館の平面図の一例を図1に示す。この八角美術館ならば建物内部に監視カメラを1台設置すれば、どこに設置しても美術館をすべて監視できる。一方で図2のネコ美術館はどうであろうか？ A地点とB地点の両方を同時に監視できる場所はないので少なくとも2台の監視カメラが必要である。そして、☆印と*印の場所に1台ずつ監視カメラを設置すれば、美術館すべてを監視できる。

つまり監視カメラは2台必要であり、それで十分である。

さらに、ネコ美術館よりも出っ張りが多い図3のノコギリ美術館の場合は7台の監視カメラが必要でありそしてそれで十分である。ネコ美術館は6角形であり、

みやもと ゆういちろう

上智大学理工学部

〒102-0081 東京都千代田区四番町 4-7

miyamoto@sophia.ac.jp

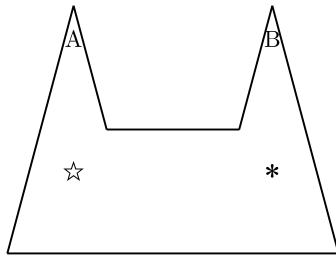


図2 ネコ美術館

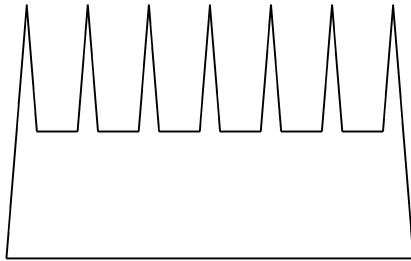


図3 ノコギリ美術館

ノコギリ美術館は21角形である。よって「監視カメラの台数は角の数の3分の1あれば十分である」と予想できるかもしれない。

実はこの予想は一般に正しく、俗に**美術館定理** (art gallery theorem) と呼ばれる¹。美術館定理を正確に表現すると以下のとおりである。

美術館定理

一般に、 n 多角形の実験館には高々 $n/3$ の監視カメラを設置すれば十分である。

なお、 $n/3$ が整数でない場合には小数部分は切り捨ててよい。この定理は見るからに初等幾何的な定理であるが、その証明はグラフ理論を用いるとわかりやすい。また、グラフ理論を正確に理解するためには集合や関数を使いこなせると便利である。美術館定理を理解するという目標のもとに、集合と関数、グラフ理論の順に紹介する。そして、グラフ理論の簡単な応用として頂点彩色を紹介する。

2. 集合と関数

高校で習う数学では、要素を波括弧で囲んで集合を表現する [1]。たとえば、10未満の素数の集合であれば

¹ 配置後は移動できないが全方位を監視できる警備員の配置を考えるというのがオリジナルの設定であるが、それは2015年現在によく見かける監視カメラそのものである。

$\{x \mid x \text{は素数}, x < 10\}$ 、あるいは具体的に $\{2, 3, 5, 7\}$ と表現する。この表現は厳密には要素の順番を無視する集合の表現方法であり、 $\{2, 3, 5, 7\} = \{5, 2, 7, 3\}$ である。

一方で、高校で習う数学ではあまり明言されないが、要素の順番を無視しない集合は、要素を丸括弧で囲んで表現する。たとえば xy 平面上の座標を表現する際には、括弧の中の第一の要素は x 座標の値、第二の要素は y 座標の値と約束されることが多い。この場合には $(1, 2) \neq (2, 1)$ であり、要素の順番は重要である。要素の順番を無視しない集合は組 (Tuple) と呼ばれる。

この2種類の集合の表現方法はグラフ理論やアルゴリズムの記述によく用いられる。

もう一つ重要なものとして関数の表現がある。一般に集合 A の要素を入力として集合 B の要素を出力する関数 f を $f: A \rightarrow B$ と表現する。たとえば、自然数 k を入力として、小さいほうから k 番目の素数を出力する関数 f_P は、自然数の集合 \mathbb{N} 、素数の集合 \mathbb{P} を用いて、 $f_P: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$ と表現される。この関数は具体的には $f_P(1) = 2, f_P(2) = 3, f_P(3) = 5, \dots$ である。

なお、集合を表す記号には大文字、集合の要素や関数を表す記号には小文字を用いるのが慣例である。

以上の準備のもとにグラフ理論の初歩を紹介する。集合について基礎から深く学びたい方は教科書 [2] などがおすすめである。

3. グラフ理論

たとえば、図4のように四つの村があるとする。白い部分が歩けるところである。どの小路が、どの村を結んでいるかだけを表現したい場合には、小路の太さや形状は無視しても構わないであろう。そうすると図5のように単純化して、村を小さな丸、小路を線で表現してもよさそうである。これがグラフ理論におけるグラフの直感的なイメージである。丸を頂点 (vertex) と

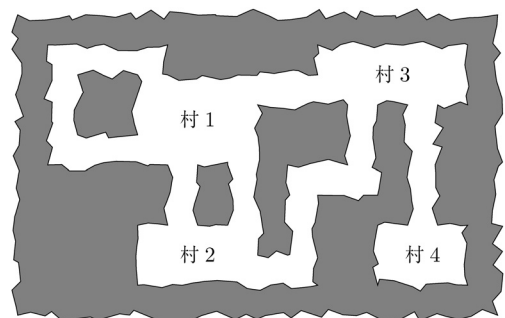


図4 四つの村の見取り図

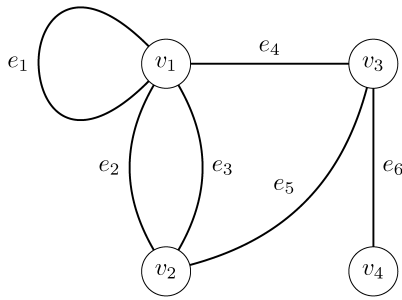


図5 四つの村とそれらをつなぐ小路を表すグラフ G_1 のイメージ

呼び、頂点を結ぶ線を枝 (edge) と呼ぶ²。図5では煩雑さを避けるため、村を記号 v_1, v_2, v_3, v_4 で表している。また、小路も記号 $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ で表している³。また、グラフ理論におけるグラフは、 G_1 という具合に、大文字のアルファベットで表現される⁴。これは、以下に示す定義のとおり、グラフ自体が集合だからである。

グラフの定義

グラフ G は頂点集合 V と枝集合 E と枝接続関数 $\Psi: E \rightarrow \{\{v, w\} \mid v \in V, w \in V\}$ の三つからなる組 (V, E, Ψ) である。

ここで枝接続関数は、枝を入力として、その枝が結んでいる頂点を出力する関数である。たとえば、図5でイメージされるグラフ G_1 を数式で表すと $G_1 = (V_1, E_1, \Psi_1)$ 、ただし $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 、 $E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ 、 $\Psi_1(e_1) = \{v_1, v_1\}$ 、 $\Psi_1(e_2) = \Psi_1(e_3) = \{v_1, v_2\}$ 、 $\Psi_1(e_4) = \{v_1, v_3\}$ 、 $\Psi_1(e_5) = \{v_2, v_3\}$ 、 $\Psi_1(e_6) = \{v_3, v_4\}$ である。また、枝で結ばれている頂点を隣接していると表現することにする。たとえば、グラフ G_1 において v_2 は v_1, v_3 と隣接しているが v_4 とは隣接していない。なお、波括弧で要素を囲んで表現される集合では、要素の重複を許さないことが多い。しかしこの記事では要素の重複を許すこととする⁵。

² 頂点を節点、node などと呼ぶこともある。枝を辺、arc、link などと呼ぶこともある。文脈や分野によって呼び方は多少異なる。

³ 記号は何を用いてもよいが、図5のように小文字アルファベットに添字を付けるのが一般的である。アルファベットだけで添字を使わないと、頂点数や枝数が26を超えたときの対処を考える必要が生じるからである。

⁴ こちらは添字を使わないことも多い。一度にたくさんのグラフを使うことはあまりないからである。

⁵ 重複を許す集合を多重集合などと呼ぶ [3]。

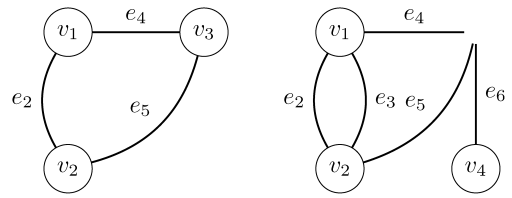


図6 G_1 の部分グラフらしきもの

このように、グラフは集合や関数を用いて数学的に表現されるものであり、図5などは人間がグラフを直感的に捉えやすくするためのものである。また、与えられたグラフ G に対して、頂点集合を $V(G)$ 、枝集合を $E(G)$ で表すこともある。これは、 V はグラフを入力としてその頂点集合を出力する関数、 E はグラフを入力としてその枝集合を出力する関数という雰囲気である。

集合に対して部分集合という概念があるように、グラフにも部分グラフ (subgraph) という概念がある。

部分グラフの定義

グラフ G とグラフ H が与えられたとき、 $V(H) \subset V(G)$ かつ $E(H) \subset E(G)$ であるならば、グラフ H はグラフ G の部分グラフである。

たとえば図6の左側は G_1 の部分グラフであるが、右側は G_1 の部分グラフではない。

図6の右側の頂点集合も枝集合も G_1 のそれらの部分集合になっているように見える。しかし e_4, e_5, e_6 が接続するはずの頂点が欠けているので、右側はそもそもグラフになっていないのである。これは図6の右側をグラフの定義どおりに数式で表すことができないことからわかる。もう一つ、美術館定理の証明で利用するため、誘導部分グラフ (induced subgraph) も紹介する。

誘導部分グラフの定義

グラフ G の部分グラフ H が $E(H) = \{\{v, w\} \in E(G) \mid v \in V(H), w \in V(H)\}$ を満たすならば、グラフ H はグラフ G の誘導部分グラフである。またこのとき、 H を $V(H) \subset V(G)$ によって誘導された部分グラフであるといい、記号 $G[V(H)]$ で表す。

直感的には、頂点が残っている限りはそれに接続する

枝もすべて残すのが誘導部分グラフである。図 7 に G_1 の誘導部分グラフ $G_1[\{v_1, v_2, v_4\}]$ を例として示す。

なお、図 6 の左側は G_1 の部分グラフであるが誘導部分グラフではない。

ところで、図 5 のグラフ G_1 における枝 e_1 を通っても村 v_1 から他の村へ行くことはできない。このように $\Psi(e)$ の要素が一致している枝 e を自己ループ (self loop) あるいは単に loop) という。また、図 5 のグラフ G_1 における枝 e_2 と e_3 のように $\Psi(e) = \Psi(e')$ となっている枝 e, e' を並行 (parallel) であるという。村が隣接しているか否かだけを表現したい場合には、自己ループや並行な枝は必要ない。村の隣接関係だけを表現しているグラフ G_2 を図 8 に示す。グラフ G_2 のように自己ループや並行な枝を含まないグラフを単純グラフ (simple graph) という。分野によっては単純グラフのみが現れる文脈も多いため、単に「グラフ」とだけ記述されていても暗に単純グラフであることを仮定している場合がある。よって注意が必要である。また、単純グラフは並行な枝を含まないので、接続関数の値をそのまま枝集合としても正確性は失われない。たとえば単純グラフ G_2 は頂点集合 V_2 と枝集合 E_2 の二つからなる組 (V_2, E_2) であり、 $V_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 、 $E_2 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$ としても枝の区別に困ることはない。一般に、並行な枝を区別しない場面や分野ではグラフは頂点集合と枝集合の組であると定義されていることもある。

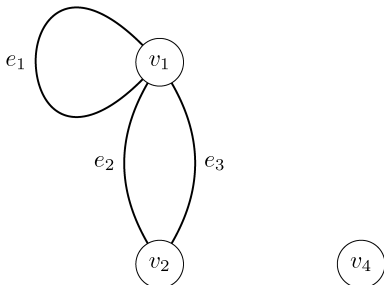


図 7 G_1 の誘導部分グラフ $G_1[\{v_1, v_2, v_4\}]$

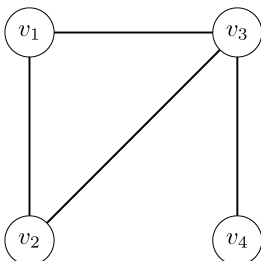


図 8 四つの村の隣接関係を表したグラフ G_2

並行な枝を区別しないグラフの定義

グラフ G は頂点集合 V と枝集合 $E \subset \{\{v, w\} \mid v \in V, w \in V\}$ の二つからなる組 (V, E) である。

この定義では、集合のみでグラフが表現されている。

なお、グラフ理論におけるグラフでは枝の接続関係だけが重要である。そしてそれは数式で正確に記述できるので、図はおまけという位置づけである。しかし一方で図は人間が接続関係を直感的に理解するためには非常に強力であり、グラフをどのように (多くの場合は 2次元平面上に) 描くかはグラフ描画 (graph drawing) という一つの研究分野となっている。

また、枝接続関数を $\Psi: E \rightarrow \{(v, w) \mid v \in V, w \in V\}$ と定義したグラフ、すなわち枝の向き (すなわち枝に現れる頂点の順番) を考慮したグラフを有向グラフ (directed graph) という。有向グラフも重要な概念であるが、この記事では割愛する。

本節ではグラフ理論の初歩の紹介にとどめた。より深く学びたい場合には、教科書 [4, 5] などを参照されたい。

4. 頂点彩色

グラフをより理解する例として、そして美術館定理の証明の準備として頂点彩色を紹介する。

色の集合とグラフ G が与えられたとき、頂点への色の割当て関数

$$f: V(G) \rightarrow \text{色の集合}$$

のうち隣接し合う頂点には異なる色が割り当てられているものを頂点彩色という。たとえば、図 9 のグラフ G_3 に対して $f_3(v_1) = \text{赤}$ 、 $f_3(v_2) = \text{青}$ 、 $f_3(v_3) = \text{黄}$ 、 $f_3(v_4) = \text{青}$ 、 $f_3(v_5) = \text{黄}$ 、 $f_3(v_6) = \text{緑}$ で定義される関数 f_3 は頂点彩色である。

頂点彩色の特別な場合として地図の塗り分けがある。

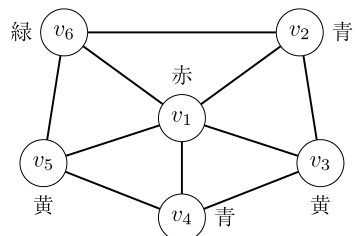


図 9 単純グラフ G_3 とその頂点彩色

現在では四色定理と呼ばれているが、1970年代までは数学上の未解決問題として有名であった。興味ある読者は文献 [6]などを参照されたい。

頂点彩色は、単なる数学的（あるいは知的）好奇心を満たすだけでなく、さまざまな場面で役に立つ。その簡単な例を以下に見てみよう。

マスコットキャラクターの出現スケジュールとあるテーマパークのアトラクション配置が単純グラフで与えられているとする。グラフの頂点はアトラクションを表しており、枝はアトラクションを結ぶ通路を表している。このテーマパークにおいて、マスコットキャラクターをそれぞれのアトラクションで少なくとも朝・昼・夕・晩のいずれかの時間帯で出現させたい。マスコットキャラクターは、ここだけの秘密であるが、複数用意してある。ただし、アトラクションを結ぶ通路は直線状であるため、通路で結ばれているアトラクションに同時時間帯にマスコットキャラクターを出現させることは避けたい⁶。それは可能であろうか？可能ならば、どのアトラクションにどの時間帯にマスコットキャラクターを出現させればよいであろうか？

⁶ 通路で結ばれているアトラクションに同時時間帯にマスコットキャラクターを出現させると場合によっては2体のマスコットキャラクターが同時に見えてしまうかもしれない。それは純粋な訪問者の夢を壊しかねない。

ここで先ほど紹介した頂点彩色の利用を考えてみる。たとえば、アトラクション配置として図9の単純グラフ G_3 が与えられたならば、頂点彩色 f_3 の値 { 赤, 青, 黄, 緑 } を { 朝, 昼, 夕, 晩 } に対応させるだけで、そのままアトラクションにマスコットキャラクターを出現させる時間帯として使える。

この例からもわかるように、頂点彩色はスケジューリング、特に時間割作成 (timetabling) を数理的にモデル化する際に有用である。そして次節で紹介しており、色塗りとも時間割作成とも一見関係ないところでも使えることがある。

5. 美術館定理の証明

美術館定理は Chvátal [7] によって 1975 年に初めてモデル化され示されたものであるが、ここでは Fisk [8] による頂点彩色を経由した証明を紹介する。グラフ理論を用いた議論の例として読み進めていただければ幸いである。なお以降は、直感的わかりやすさを優先す

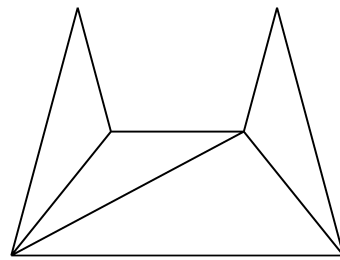


図 10 ネコ美術館の三角形分割

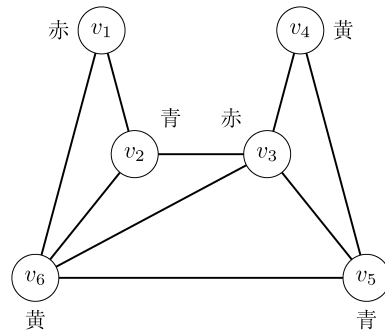


図 11 ネコ美術館の三角形分割グラフ G_4 と頂点彩色

るため、厳密性に欠ける記述も散見されるがご容赦いただきたい。

与えられた多角形の頂点を結ぶ対角線を、互いに交わらない範囲で、可能な限り引く。すると図2のネコ美術館の例では、図10のように図形を描ける。

このような図は三角形分割 (triangulation) と呼ばれる⁶。

この三角形分割をグラフとみなす。すなわち、元の多角形の頂点を頂点集合とし、元の多角形の周を構成するすべての線分と新たに追加された対角線を枝集合とみなすのである。図10に対応するグラフ G_4 を図11に示す。

このように三角形分割をグラフとみなしたものを三角形分割グラフという。

多角形に対角線だけを加えて作った三角形分割グラフは3色で頂点彩色できる。たとえば、グラフ G_4 に対しては $f_4(v_1) = \text{赤}$, $f_4(v_2) = \text{青}$, $f_4(v_3) = \text{赤}$, $f_4(v_4) = \text{黄}$, $f_4(v_5) = \text{青}$, $f_4(v_6) = \text{黄}$ で定義される関数が頂点

⁶ ここでの三角形分割は、より正確には、多角形に対角線のみを加えてできる三角形分割である。他にも、(多角形の頂点とは限らない) 与えられた頂点集合に対して、頂点を結ぶ線分を互いに交わらないように、可能な限り追加して作られる三角形分割もある。そのような三角形分割はさまざまな工学的応用をもつ。たとえば、構造解析で用いられる有限要素法やコンピューター・グラフィックスのメッシュ生成にも用いられる。このような対象を扱う分野として計算幾何学 (computational geometry) がある。

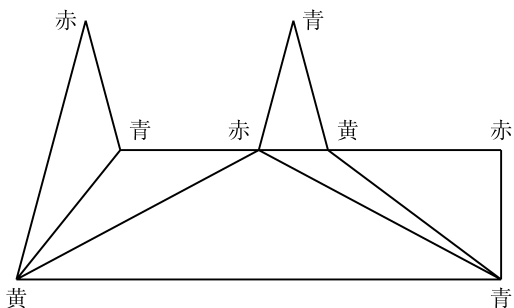


図 12 拡張されたネコ美術館の三角形分割と頂点彩色

彩色となっている. このようなグラフが 3 色で頂点彩色できる理由は次節で示すことにする.

グラフを 3 色で頂点彩色できたならばそのうちのいずれか 1 色が割り当てられた頂点に監視カメラを設置すればよい. 図 11 を見ると「たとえば青が割り当てられた頂点に監視カメラを設置すれば美術館のすべてを監視できる」ことが確認できる. これは, 頂点彩色の定義より, 三角形分割のどの三角形にも青が割り当てられた頂点があるので, どの三角形も監視されており, すなわち美術館のすべてが監視されているからである. さらに, 頂点彩色において割り当てられた頂点数が最も少ない色が割り当てられた頂点に監視カメラを設置すれば, 監視カメラの台数は高々 $n/3$ となっている. そうでないならば色を割り当てた頂点数の合計が n を超えてしまうからである. 例として, 図 12 に建屋が拡張されたネコ美術館 (すなわち $n = 8$ の場合) の三角形分割と頂点彩色を示す.

この場合は, 頂点数が最も少ない黄に監視カメラを設置すれば, $2 (\leq n/3)$ 台の設置で済む.

以上で, 多角形に対角線だけを加えて作った三角形分割グラフが 3 色で頂点彩色できることを認めれば, 美術館定理の証明は終わりである.

6. 三角形分割グラフの頂点彩色

ここでは, 文献 [9] に沿って三角形分割グラフを必ず 3 色で頂点彩色できることを示す. 具体的には, 帰納的に 3 色で頂点彩色する手続きを以下に示す. 紙面の都合上, 簡略化された記述となるがご理解いただきたい.

Step 1 三角形分割グラフの頂点が三つならば, すなわち単なる三角形ならば, てきと〜に赤・青・黄を一つずつ割り当てて終了する.

Step 2 三角形分割グラフの枝のうち対角線, す

なわち元の多角形の周ではないものを一つ選ぶ. 選んだ枝を $\{v, w\}$ とする.

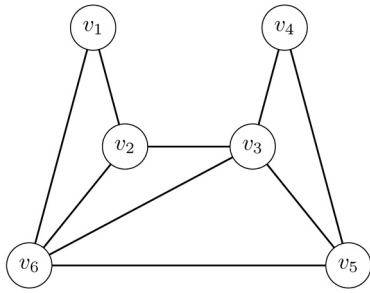
Step 3 選んだ枝 $\{v, w\}$ でグラフを二つに切り分ける. すなわち, v から w へ時計回りに周上にある頂点から誘導される部分グラフ, v から w へ反時計回りに周上にある頂点から誘導される部分グラフをそれぞれ作る.

Step 4 それぞれの誘導部分グラフを, この手続きを再帰的に利用することで, 独立に 3 色で彩色する.

Step 5 それぞれの誘導部分グラフを 3 色で彩色できたならば, 仮に v や w に割り当てられた色に食い違いがあったとしてもどちらかの誘導部分グラフの色の名前を入れ替えることで, 全体を 3 色で彩色するよう併合して終了する.

たとえば, この手続きをネコ美術館の三角形分割グラフ G_4 に適用すると以下のとおりになる. グラフ理論や再帰の手続きに不慣れな方は, 誘導部分グラフと色の割り当てを手で描きながら辿っていただきたい.

1. まず, G_4 の頂点は三つよりも多いので Step 1 では何も行われない.
2. 続く Step 2 では, $\{v, w\}$ として $\{v_3, v_6\}$ が選ばれたとする. すると, Step 3 では G_4 の誘導部分グラフ $G_4[\{v_3, v_4, v_5, v_6\}]$ と $G_4[\{v_3, v_2, v_1, v_6\}]$ が作られる (図 13 参照).
3. 続く Step 4 では, これらの誘導部分グラフそれぞれに対して, この一連の手続きを改めて行う.
 - (a) まず誘導部分グラフ $G_4[\{v_3, v_4, v_5, v_6\}]$ に対して, この一連の手続きを行う.
 - i. 誘導部分グラフ $G_4[\{v_3, v_4, v_5, v_6\}]$ の頂点は三つよりも多いので Step 1 では何も行われない.
 - ii. 続く Step 2 では, $\{v, w\}$ として $\{v_3, v_5\}$ が選ばれたとする. すると, Step 3 では $G_4[\{v_3, v_4, v_5, v_6\}]$ の誘導部分グラフ $G_4[\{v_3, v_4, v_5\}]$ と $G_4[\{v_3, v_6, v_5\}]$ が作られる.
 - iii. 続く Step 4 では, これらの誘導部分グラフ $G_4[\{v_3, v_4, v_5\}]$ と $G_4[\{v_3, v_6, v_5\}]$ それぞれに対して, この一連の手続きを改めて行う. すると, どちらの誘導部分グラフも頂点数は 3 なので, Step 1 に



たとえば $\{v_3, v_6\}$ で二つに切り分ける.

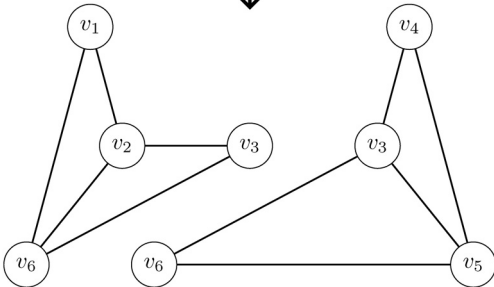
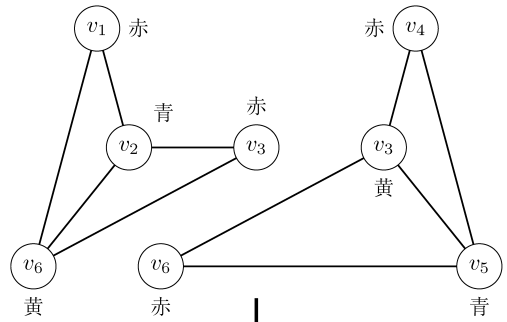


図 13 グラフの分割 (誘導部分グラフの生成)



左側のグラフの赤と黄を入れ替えてあわせる.

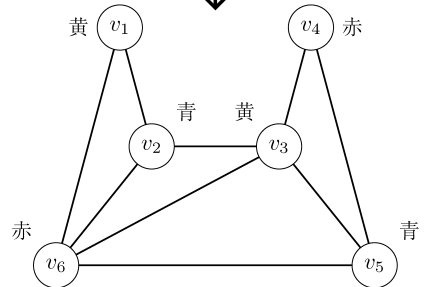


図 14 彩色の併合

いててきと〜に赤・青・黄が割り当てられて、誘導部分グラフ $G_4[\{v_3, v_4, v_5\}]$ と $G_4[\{v_3, v_6, v_5\}]$ に対する一連の手続きは終了する。たとえば、 $G_4[\{v_3, v_4, v_5\}]$ の v_3 には黄、 v_4 には赤、 v_5 には青が割り当てられ、 $G_4[\{v_3, v_6, v_5\}]$ の v_3 には黄、 v_6 には赤、 v_5 には青が割り当てられたとする。

iv. 続く Step 5 では、 $G_4[\{v_3, v_4, v_5\}]$ と $G_4[\{v_3, v_6, v_5\}]$ の (直前の Step 4 で得られた) 彩色を併合して、 $G_4[\{v_3, v_4, v_5, v_6\}]$ の彩色を得る。ここでは、幸運なことに、 $G_4[\{v_3, v_4, v_5\}]$ と $G_4[\{v_3, v_6, v_5\}]$ における v_3 の色が一致し、 v_5 の色も一致している。よってそれぞれの彩色をそのまま採用し $G_4[\{v_3, v_4, v_5, v_6\}]$ の v_3 には黄、 v_4 には赤、 v_5 には青、 v_6 には赤が割り当てられたとする。

(b) 誘導部分グラフ $G_4[\{v_3, v_2, v_1, v_6\}]$ に対しても一連の手続きを同様に行う。詳細は省略するが、 v_3 には赤、 v_2 には青、 v_1 には赤、 v_6 には黄が割り当てられたとする。

4. 続く Step 5 では $G_4[\{v_3, v_4, v_5, v_6\}]$ と $G_4[\{v_3, v_2, v_1, v_6\}]$ の彩色を併合して、 G_4 の彩色を得る。ここでは、不運なことに、 $G_4[\{v_3, v_4, v_5, v_6\}]$ と $G_4[\{v_3, v_2, v_1, v_6\}]$ における v_3 の色は一致しておらず、 v_6 の色も一致していない。よって、たとえば $G_4[\{v_3, v_2, v_1, v_6\}]$ における赤を黄に、黄を赤に入れ替えて (あるいは読み替えて) それぞれの彩色を採用し G_4 の 3 色での彩色を得る (図 14 参照)。

以上で美術館定理の証明は終了である。

7. おわりに

この記事では、集合と関数を簡単に紹介し、続けてグラフ理論の初歩を紹介した。グラフの例としては小路による接続関係を挙げた。もちろん、グラフで表現できるのは小路だけではない。通信網や鉄道網などの実際に目で「網」に見えるものはもちろんであるが、友人関係など目に見えない抽象的な関係のモデル化にも役立つ。そして、数式などの記法を適切に用いてモデル化したもの同士に共通点を見いだすことがオペレーションズ・リサーチにおける大事な作業であるように思う。この記事が、グラフ理論や離散アルゴリズムの文献を読む準備の一助となれば幸いである。

この記事では、グラフ理論における記法を使う例として、美術館定理を扱った。これは、グラフ理論の応用として自明ではない好例であると筆者が思ったためである⁷。美術館定理そのものに興味が湧いた方には文献 [10] を薦めたい。この本には美術館問題およびその変種とアルゴリズムが、さまざまな形の美術館の図とともに紹介されている。

参考文献

- [1] 大島利雄ほか, 『数学 I』, 数研出版, 2014.
- [2] 齋藤正彦, 『数学の基礎—集合・数・位相—』, 東京大学出版会, 2002.
- [3] ドナルド・クヌース (有澤誠, 和田英一監訳, 青木孝, 笈一彦, 鈴木健一, 長尾高弘訳), 『The Art of Computer Programming Volume 2: Seminumerical Algorithms Third Edition』, Kadokawa, 2015.
- [4] R. Diestel, *Graph Theory*, 4th edition, Springer, 2010.
- [5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory*, 3rd edition, Springer, 2011.
- [6] ロビン・ウィルソン (茂木健一郎訳), 『四色問題』, 新潮社, 2013.
- [7] V. Chvátal, “A combinatorial theorem in plane geometry,” *Journal of Combinatorial Theory*, **18**, pp. 39–41, 1975.
- [8] S. Fisk, “A short proof of Chvátal’s watchman theorem,” *Journal of Combinatorial Theory*, **24**, p. 374, 1978.
- [9] M. Aigner and G. M. Ziegler, “How to guard a museum,” *Proofs from the Book*, 5th edition, Springer, pp. 265–268, 2014.
- [10] J. O’rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press, 1987.

⁷ 同様の好例としては、接吻数 (kissing number) を挙げたい。