Infinitesimal Rigidity of Symmetric Frameworks

池下　林太郎

東京大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻（現：株式会社日立製作所）
指導教員：室田一雄　東京大学教授（現：首都大学東京教授）

1. はじめに

1970 年代以降，トラス構造のようなフレームワーク[1]の自由度を，組合せ最適化に関わってくるマトロイドや劣モジュラ関数の理論とネットワークフローなどのアルゴリズムを用いて解析するという研究が行われてきた．この分野は剛性理論と呼ばれ，近年では，蛋白質の立体挙動解析やセンサーネットワークの位置同定問題などにおける，高速アルゴリズム設計のための応用数理としても注目を浴びている．フレームワークの自由度は，配置が一般的[2]であるとき，剛性行列と呼ばれる多項式行列の階数によって代数的に定まるが，Laman の定理は，2 次元の場合に，その階数の値が交差劣モジュラ関数の理論を通じて組合せ的に特徴づけられることを示唆している．

定理 1（Laman の定理）**.** 一般的配置をした 2 次元フレームワークが剛であるのは，そのグラフ構造が Laman の条件を満たすことが必要十分．ここで，$G=(V,E)$ が Laman の条件を満たすとは，ある全域枝集合 $E' \subseteq E$ が存在して，$|E'|=2|V|-3$ かつ $|F| \leq 2|V(F)|-3$ $(\emptyset \neq F \subseteq E')$ であること．

さて，ここ数年，対称性の高いメカニズムに潜む組合せ的性質の解明に向け，対称なフレームワーク[3]の剛性と群ラベル付きグラフ上のマトロイドの関係が研究されてきている．現在のところ，いくつかの対称性に関しては，その対称性を有する 2 次元フレームワークの（無限小）剛性について Laman の定理の類似が得られているが，未だ多くの未解決問題が残る分野になっている．本研究の主結果は，Laman の定理を奇数位数の巡回群の対称性をもつ 2 次元フレームワークに拡張したこと，また，その副産物として，新たなクラスの疎性マトロイドを発見したことにある．

[1] d 次元フレームワークは，グラフ G とジョイントの配置 $\boldsymbol{p}: V(G) \to \mathbb{R}^d$ の対 $(G,\boldsymbol{p})$ として定義される．各辺の長さを変えないような各ジョイントの連続的移動をフレームワークの動きといい，特に合同なフレームワークへの動きを自明な動きという．自明な動きのみが可能なフレームワークを剛であるといい，剛でないフレームワークを柔かであるという．

[2] 配置 $\boldsymbol{p}$ が一般的とは，ジョイント座標値の集合が有理数体上代数的独立であるときをいう．

[3] 対称なフレームワークの配置は一般的でない．

2. 対称なフレームワークの無限小剛性

無限小剛性とは，剛性を一次近似した概念であり，フレームワークに対して定まる剛性行列の階数を用いて定義される[4]．対称なフレームワークの剛性行列は，有限群の表現論を用いてブロック対角化されることが知られている[5]．各ブロックの構造は，もとのグラフ構造 G を対称なフレームワークが従う群 Γ で割って得られる群ラベル付き商グラフ $(G/\Gamma,\psi)$[6]が定めることを Schulze and Tanigawa [5] が指摘した．対称なフレームワークの組合せ的性質は，群ラベル付き商グラフにおいて議論される．

剛性理論において群ラベル付きグラフが初めて登場したのは，Malestein and Theran [3] や Ross [4] が 2 次元周期フレームワークへ Laman の定理を拡張したときである．この結果を受けて，Jordán et al. [1] は，群ラベル付きグラフの逐次的構築法による無限小剛性解析手法を開発することで，任意位数の巡回群または奇数次の二面体群の対称性をもつフレームワークに対して，その（対称性を保つ動きの解析に問題を制限した場合の）無限小剛性の組合せ的特徴づけを与えた．巡回群に対する組合せ的特徴づけについては，Malestein and Theran [2] や Tanigawa [6] が別証明を与えている．対称性の崩壊を伴う動きも含めた場合の無限小剛性の解析については，Schulze and Tanigawa [5] が，二面体群 $\mathcal{D}_1$ と巡回群 $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ の対称性をもつフレームワークに対して，その無限小剛性を組合せ的に特徴づけることに成功している．

[4] 無限小剛な $(G,\boldsymbol{p})$ は剛．$\boldsymbol{p}$ が一般的なとき逆も成立する．

[5] 各ブロックは，フレームワークの対称性をあらわす有限群の各既約表現に対応する．これは，対称なフレームワークの無限小剛性を扱う問題は，各既約表現の表現空間ごとの問題に分割されることを意味する．

[6] Γ ラベル付きグラフとは，多重グラフ H と写像 $\psi: E(H) \to \Gamma$ のペア (H,ψ) のことである．

3. 奇数位数巡回群の対称性をもつフレームワークの無限小剛性の組合せ的特徴づけ

$(G,\boldsymbol{p})$ を巡回群 $\mathcal{C}_n(\simeq \mathbb{Z}_n)$ の対称性をもつフレームワーク，(H,ψ) を G の $\mathbb{Z}_n$ ラベル付き商グラフとする．集合関数 $f^{(i)}_{\mathbb{Z}_n}: 2^{E(H)} \to \mathbb{Z}$ を

$$f^{(i)}_{\mathbb{Z}_n}(F) = 2|V(F)| - 3 + \sum_{X\in C(F)} \beta^{(i)}_{\mathbb{Z}_n}(X)$$

で定める[7–9]．ここで，

$$\beta^{(i)}_{\mathbb{Z}_n}(X) = \begin{cases} 0 & (\langle X\rangle \simeq \{0\}) \\ 1 & (i\text{ が奇数，かつ，}\langle X\rangle \simeq \mathbb{Z}_2) \\ 2 & (X\text{ が (C1) または (C2) を満たす}) \\ 3 & (\text{その他}). \end{cases}$$

(C1) $\langle X\rangle \simeq \mathbb{Z}_k$ なる k が，$i \equiv_k 0, 1$ or -1 を満足；
(C2) ある $v\in V(X)$ と $k\in\mathbb{Z}_n$ が存在して，X における閉路 W であって v を始点と終点にのみもつものに対し $\psi(W)\in\{0,\pm k\}$ が成立．

本研究では，この $f^{(i)}_{\mathbb{Z}_n}$ が各 $i=0,1,\ldots,n-1$ について疎性マトロイドを導くことを示した[10]．

定理 2 (Ikeshita–Tanigawa)**．** (H,ψ) を $\mathbb{Z}_n$ ラベル付きグラフとする．$(E(H),\mathcal{I}^{(i)}_{\mathbb{Z}_n})$ はマトロイド．ここで

$$\mathcal{I}^{(i)}_{\mathbb{Z}_n} = \{F\subseteq E(H): |F'| \le f^{(i)}_{\mathbb{Z}_n}(F') \quad (\emptyset \ne F' \subseteq F)\}.$$

次に，本研究では，奇数位数の巡回群の対称性をもつフレームワークに対して，定理 2 で導入した各マトロイドが，ブロック対角化された剛性行列の各ブロック（に対応する行列）から誘導される線形マトロイドと同型であることを示した．証明は，[1] において整備された群ラベル付きグラフにおける Henneberg 構築法に基づく．定理 2 の各マトロイドの階数関数を用いて，もとの剛性行列の階数を表すことができる．

定理 3 (Ikeshita–Tanigawa)**．** 巡回群 $\mathcal{C}_n$（n は 1000 以下の奇数[11]）の対称性をもつフレームワークについて，その剛性行列の階数は

$$\sum_{i=0}^{n-1} \min\left\{\sum_{F\in\mathcal{P}} f^{(i)}_{\mathbb{Z}_n}(F) : \mathcal{P}\text{ は }E(H)\text{ の分割}\right\}$$

で与えられる．ここで，フレームワークの配置は対称性制約のもとで一般的であることを仮定する．

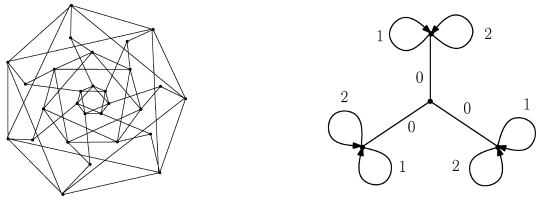

図 1 $\mathcal{C}_7$ の対称性をもつ柔かなフレームワーク（左）とその群ラベル付き商グラフ（右）

定理 3 の特徴づけに加えて，本研究では，一般剛性を特徴づける Laman の条件は，位数が 7 以上の巡回群の対称性をもつフレームワークの剛性を特徴づけないことを示した．図 1 のフレームワークは，グラフ構造が Laman の条件を満たすため，配置が一般的であれば剛である．しかしながら，$\mathcal{C}_7$ の対称性をもたせて配置することで，柔かなフレームワークになる．位数が 8 以上の巡回群についても同様の例が存在する．

参考文献

[1] T. Jordán, V. Kaszanitzky and S. Tanigawa, "Gain-sparsity and symmetry-forced rigidity in the plane," The EGRES technical report, TR-2012-17, 2012.

[2] J. Malestein and L. Theran, "Frameworks with forced symmetry I: Reflections and rotations," *Discrete Comput. Geom.*, **54**, pp. 339–367, 2015.

[3] J. Malestein and L. Theran, "Generic combinatorial rigidity of periodic frameworks," *Adv. Math.*, **233**, pp. 291–331, 2013.

[4] E. Ross, "Geoemetric and combinatorial rigidity of periodic frameworks as graphs on the torus," Ph. D. thesis, York University, 2011.

[5] B. Schulze and S. Tanigawa, "Infinitesimal rigidity of symmetric bar-joint frameworks," *SIAM J. Discrete Math.*, **29**, pp. 1259–1286, 2015.

[6] S. Tanigawa, "Matroids of gain graphs in applied discrete geometry," *Trans. Amer. Math. Soc.*, **367**, pp. 8597–8641, 2015.

[7] i は $\mathbb{Z}_n$ の既約表現の名前で，$i=0,1,\ldots,n-1$ である．
[8] $C(F)$ は，グラフ $(V(F),F)$ の各連結成分の枝集合を要素にもつ集合族をあらわす．
[9] 連結な枝集合 $F\subseteq E(H)$ に対して，$\langle F\rangle$ を $\langle F\rangle = \{\psi(W): W\text{ は }F\text{ における閉路}\}$ で定義する．ただし，W が $v_1e_1v_2\cdots v_ne_nv_1$ のとき $\psi(W)=\psi(e_1)+\cdots+\psi(e_n)$．
[10] 定理 2 から定理 3 にわたる一連の証明は，[1] で用いられた証明法に触発されている．
[11] 証明の一部で，n を固定するごとに，最小なフレームワーク ($|V(H)|=1, |E(H)|=2$) が無限小剛であることを示す必要がある．n を 1000 以下に限るのは，その証明に計算機を用いているためである．