

# エッシャー風タイリング自動生成法の改良と応用

川出 静

名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻（現：株式会社トヨタケーラム）  
指導教員：今堀慎治 名古屋大学准教授（現：中央大学教授）

## 1. はじめに

有限種類の図形によって、平面を隙間も重なりもなく敷き詰めたものをタイリングと呼ぶ。オランダの版画家 M. C. Escher は、このタイリングを用いた芸術的な作品を数多く残した。Escher の作品のようなタイリングを、計算機を用いて自動的に生成することを目的とした問題があり、Escherization Problem（エッシャー風タイリング問題）と呼ばれる [1]。これは、入力図形が与えられ、その図形にできるだけ近い図形によるタイリングを求める問題である。タイリングには 1 種類の図形を用いたものや、2 種類の図形を用いたもの、また、それ以上の複数種類の図形を用いたものが存在する。1 種類の図形に対するエッシャー風タイリング問題は近年盛んに研究され、既存解法 [2, 3] により、質のよい解を得ることができる。本研究では、既存解法 [2, 3] に対し、改良と応用を行う。

## 2. エッシャー風タイリング問題と既存解法

1 種類の図形に対するエッシャー風タイリング問題は、ある図形  $S$  が与えられたとき、「図形  $T$  は平面を敷き詰めることができる」、「図形  $T$  はできるだけ  $S$  に近い形である」という二つの条件を満たす図形  $T$  を見つける問題である。最適化問題として記述すると、

$$\text{最小化 } d(S, T),$$

制約条件 図形  $T$  は平面を敷き詰めることができるとなる。ここで、 $d$  は図形同士の距離である。

小泉ら [2] は、図形を多角形として与え、図形同士の距離としてプロクラステス距離を用い、敷き詰め可能な条件として数学的に扱いやすい isohedral タイリングを用いている。目的関数と制約条件をそれぞれ定式化すると、行列の最大固有値とそれに対応する固有ベクトルを求める問題に帰着され、その解は陽的に求められる。（小泉らの示した解は、一部の場合において誤っていたため、射影法に基づく新たな解き方を提案した。）

ただし、小泉らの手法には、図形を線画とみなした場

合に似た図形でも、点の配置によって解の質が変わってしまうといった問題点が存在する。そこで酒井 [3] は、制約条件を緩和することにより改善を図った。この手法は局所探索に基づく発見的解法であり、小泉らの解法と比較すると計算時間はかかるものの、解の改善（良質のタイリング生成）が確認されている。

## 3. 重みの導入

既存解法で図形同士の距離として用いられたプロクラステス距離による評価は、しばしば人間の感性と一致しないという問題点がある。そこで、使用する距離を変更する。ただし、プロクラステス距離はタイリングに適しており、さらに今回の最適化問題において、固有値問題に帰着されるというよい性質をもっているため、その性質を残しつつ改良することを考える。そこで、入力の多角形の各頂点に重みを付け、出力図形の形状を制御する。形を保持したい部分に大きな重みを付けることで、その部分の形ができるだけ保持されたものが出力されると期待される。

重み付きプロクラステス距離を定義し、それを小泉らの手法に適用すると、一般化固有値問題に帰着される。さらに、制約条件の定式化で現れる行列を工夫して定めることにより、結局、標準固有値問題に帰着できる。この問題の解は、小泉らの手法と同様、陽的に求められる。また、酒井の手法は内部で小泉らの手法が繰り返されるため、同様に適用することができる。

酒井の手法に重み付きプロクラステス距離を適用して実験した結果を図 1 に示す。(a) は入力図形、(b) は酒井の手法で求めた出力図形、(c) は提案手法で求めた出力図形、(d) は (c) のタイリングである。

## 4. 2 種類の図形によるタイリングの生成

2 種類の図形に対するエッシャー風タイリング問題は、二つの図形  $S_1, S_2$  が与えられたとき、「図形  $T_1$  と  $T_2$  で平面を敷き詰めることができる」、「図形  $T_1, T_2$  はできるだけ  $S_1, S_2$  に近い形である」という二つの条件を満たす図形  $T_1, T_2$  を見つける問題である。この問題に対し本研究では、2 種類の図形  $S_1, S_2$  の両方を入

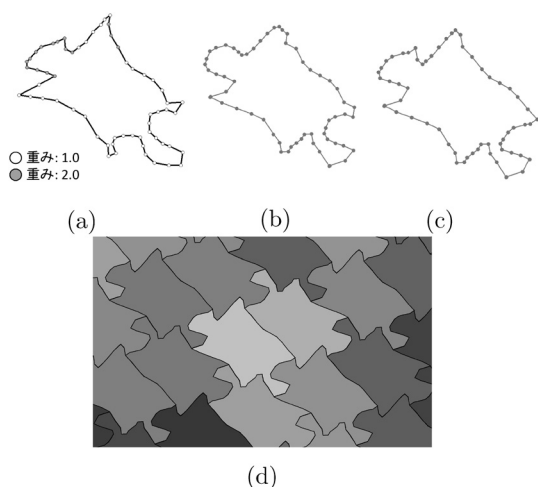


図1 ムササビのタイリング

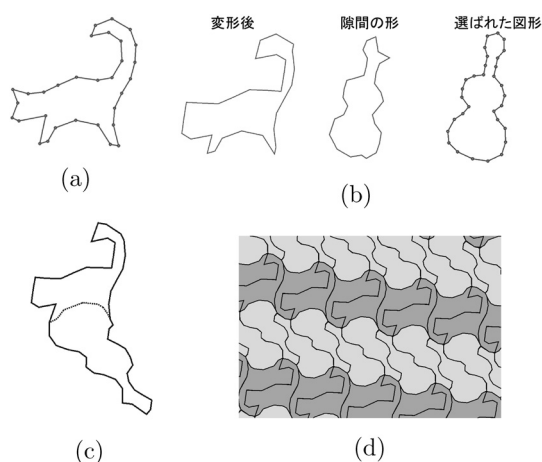


図3 ネコの実験結果

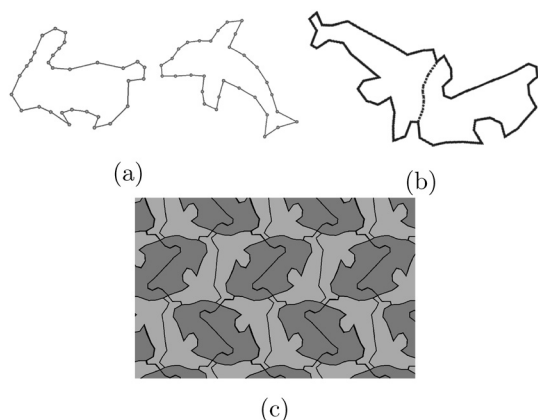


図2 ウサギとイルカのタイリング

力する場合と、一つのみを入力する場合についてそれぞれ手法を提案する。

#### 4.1 二つの図形を入力する場合

初めに、2種類の図形の両方を入力する場合について述べる。本研究では1種類の図形に対する既存解法を用いる。まず、二つの入力図形を接合して一つの図形とする。次に既存解法を用いて、一つの図形としてタイリングを生成する。最後に、タイルを再び二つに分離することで、2種類の図形によるタイリングとする。

数値実験を行った結果を図2に示す。(a)は入力図形、(b)は得られた解、(c)は(b)のタイリングである。

#### 4.2 一つのみ図形を入力する場合

4.1節で述べた手法で得られる解の質は、二つの入

力図形の組み合わせに大きく影響される。そこで入力図形を一つのみとし、もう一方の図形として、あらかじめ用意しておいたデータベースから入力図形と相性のよさそうなものを選び出すことを考える。

図形の選択方法としては、入力図形を規則的に並べると同じ形の隙間が多数できると予想されることから、その隙間の形とデータベースの各図形との距離を計算し、最も近いものを採用するという方法を用いる。実際は隙間がきれいにはできないことがほとんどだが、入力図形を変形するなどして作る。

タイリングの生成は図形の接合後、酒井らの手法を用いる。酒井らの手法は局所探索を用いたものであったが、ここでは局所探索を行う必要がなく、計算時間は問題とはならない。

数値実験を行った結果を図3に示す。(a)は入力図形、(b)は規則的に並べるための変形を施した入力図形とその隙間、および選ばれた図形、(c)は得られた解、(d)はそのタイリングである。

#### 参考文献

- [1] C. S. Kaplan and D. H. Salesin, "Escherization," In *Proceedings of SIGGRAPH*, pp. 499-510, 2000.
- [2] H. Koizumi and K. Sugihara, "Maximum eigenvalue problem for escherization," *Graphs and Combinatorics*, **27**, pp. 431-439, 2011.
- [3] 酒井翔平, "エッシャー風タイリング問題の数理モデルについて—制約条件の緩和及びその最適化手法—," 名古屋大学大学院工学研究科計算理工学専攻修士論文, 2013.