秘書問題
—2 つの最適停止問題の不思議な対応—

玉置　光司

最初に選択対象の数が既知の場合の 3 つのよく知られた問題（最良選択問題，期間最大化問題，順位最小化問題）を紹介します．Gnedin は，選択対象の数 N が未知の場合，最良選択問題と期間最大化問題の間に対応関係が存在することをシンボリックな形で示しました．本稿では，この 2 つの問題を無限に交互対応させる N の分布列を具体的に求め，その漸近挙動を調べました．最後に簡単なゲーム・バージョンと，関連する未解決問題を紹介します．

キーワード：秘書問題，最良選択問題，期間最大化問題，交互対応

1. はじめに

秘書問題と聞くと，多くの方は $e^{-1}(\approx 0.368...)$ という数を思い出されるのではないでしょうか．ランダムに出現する n 人の応募者から一番良い人を選ぶ方法は，全体の約 37 パーセント $(\approx e^{-1}n)$ をパスし（やり過ごし），その後，今までで一番良い人が出現したら直ちにその人を選ぶことであり，さらにそのときの成功確率も e^{-1} になるという話です．そうです，おそらくこれが最もよく知られた秘書問題だと思います．しかし，正確にはこれは対象数が既知の無情報型最良選択問題と呼ばれ，秘書問題の 1 例に過ぎません．

秘書問題は最も基本的な最適停止問題として，種々の観点からの分類が可能で，非常にバラエティーに富んでいます．利用可能な情報の観点からは，無情報，完全情報，部分情報に分類できます．達成目標（最適化基準）の観点からは確率最大化，期間最大化，順位最小化等に分類できます．これらについては，次節で少し説明します．他の観点としては，例えば，対象数が既知か未知か，選択回数が 1 回か複数回か，リコールが許されるか否か等々あります．本稿では，筆者が最近関心を持っている出現個数が未知の場合の最良選択問題と期間最大化問題の間の興味深い対応関係について紹介したいと思います．

秘書問題の歴史を少し振り返っておきましょう．[1] によれば，秘書問題は既に 1950 年代後半から数学者のコミュニテイで話題になっていたとありますから，この問題は半世紀以上の歴史を持っています．1960 年代に入り，著名な研究者による重要な研究が次々発表されます．先導役を担ったのは，Lindley [2]，Dynkin [3]，Chow，Moriguti，Robbins and Samuels [4]，Gilbert and Mosteller [5] 等です．

その後，これらに刺激を受けて多くの論文が発表されましたから，秘書問題の全貌を知るにはサーベイ論文が必要です．筆者が知るだけでも 5，6 編ありますが，1990 年までの展開を知るには，[1] と [6] が良いでしょう．最初の論文は，著名なゲーム理論家にして数理統計学者である Ferguson によるもので，“Who solved the secretary problem?” というタイトルがついています．この質問に対する著者自身の答えは，“Nobody” です．？と思った方は是非ご一読下さい．読み物としても面白いです．2 つ目の Samuels のサーベイはずばり “Secretary problems” というタイトルです．それまでの重要な研究成果をコンパクトに見事にまとめています．Samuels 先生は 3 年ほど前に亡くなられましたが，生前は秘書問題のリーダーとして，次々と新しい地平を切り開いてこられました．1990〜2000 年の動向を知るには [7] も参考になるかと思います．

秘書問題のみならず，もう少し広く逐次決定問題全般に関心がある読者には [8] を薦めます．このサーベイのタイトルは「秘書問題とその周辺」です．坂口先生が 72 歳のとき，それまでの仕事を振り返り，分類整理されたもので，50 ページを超える長編です．ご自身の論文 51 編，それ以外の論文 27 編を扱っています．51 編の論文はそれまでの全仕事の約 4 割に当たると書いておられるので，先生の精励と秘書問題への特別な思いが伝わってきます．

たまき　みつし
愛知大学経営学部
〒 453–8777 愛知県名古屋市中村区平池町 4–60–6

前掲論文 [4] のセカンド・オーサー Moriguti は日本OR 学会長を務められた森口繁一先生です．ご存知のように，先生は OR のみならず，確率統計や数理工学の分野でも大きな足跡を残されましたが，秘書問題のパイオニアでもあります．この論文の有名な無限積の結果を 2.3 節（順位最小化問題）で紹介します．先生はその後は秘書問題にほとんどコミットされず，関心を失くされたものと思っていましたが，30 年後，突然JORSJ（1992 年から 1993 年）に秘書問題の論文 5 編を連載されました．当時，大変驚いたことを覚えています．

前置きが長くなってしまいました，早速本論に入りましょう．2 節では無情報型問題の代表的な問題を紹介します．3 節で対象数が未知の場合の最良選択問題と期間最大化問題の結果を紹介し，それに基づいて，4 節では 2 問題間に存在する不思議な対応について説明します．5 節では秘書問題のゲームを紹介します．

2. 対象の数が既知の場合

最初に紹介した問題のように利用可能な情報が対象の相対順位のみという問題を無情報（型）問題と呼びます．そのフレームワークをもう少しきちんと述べておきましょう（本稿では便宜的に対象を人として説明するので，しばしば応募者という言葉を使います）．n 人の応募者がいて，採用者は応募者を評価することができる，すなわち，n 人を一堂に集めれば良い順に 1 位から n 位までの絶対順位を付けることができるものとします．しかし，実際には毎時 1 人ずつランダムに出現するので，その都度応募者の相対順位（既に出現した応募者の間での順位）が観測されます．ランダムな出現とは，正確には $n!$ 通りの出現順序が等確率という仮定です．このとき，k 番目の応募者の相対順位を R_k で表すと，$R_1, R_2, \ldots, R_n$ が独立確率変数列で，$P\{R_k = j\} = 1/k. 1 \le j \le k, 1 \le k \le n$ となることが示されます．この性質が無情報問題の核心です．

本稿では 1 人採用としています．したがって，ひとたび応募者を採用すればそれで終了し残りの人とは面談しませんが，採用しなかった場合には次の人との面談に移ります．一度断った人を後から採用する（リコール）ことは許されません．

前節で完全情報型に言及しましたが，これは k 番目の応募者に評価値 X_k が付随する場合を指します．ただし，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立同分布に従う連続な確率変数列で既知の共通の分布関数 F を持つとします．分布 F が未知パラメータを含む場合は特に部分情報型と呼ばれます．紙数の関係で，本稿の議論は以後無情報型に限定します．1 節で挙げた 3 種類の最適化基準の下での結果を簡単に紹介しておきます．

2.1 最良選択問題

m 人採用してその中に上位 k 人が全て（あるいは指定された一部分が）入っていれば成功，さもなくば失敗と見なし，成功確率を最大化する問題が考えられます．このような問題を一般に確率最大化問題と呼んでいます（例えば [5, 9]）．一番簡単な場合 $m = k = 1$ が最良選択問題 (best-choice problem) です．すなわち，n 人の中のベスト（絶対順位 1）を選ぶというものです．この問題では選択対象となるのは相対順位 1 だけ（相対順位 2 以上はベストにはなりえません）ですので，今後はこの応募者を簡単に候補者と呼びましょう．候補者の選択ルールとしては最初の $s - 1$ 人をパスして，その後に出現する最初の候補者を採用するルールを閾値ルール s あるいは単に閾値ルールと呼ぶことにします（s を閾値と呼びます）．以下に示すように最適ルールは閾値ルールのクラスの中にあることが知られています（例えば [5] 参照）．

補題 2.1（最良選択問題）：n に依存する定数 $s_n \in \{1, 2, \ldots, n\}$ が存在して，最適ルールは閾値ルール s_n となります．また，そのときの最適値（成功確率）を B_n とすると，これらは漸近的には

$$\lim_{n \to \infty} s_n/n = e^{-1}, \quad \lim_{n \to \infty} B_n = e^{-1}$$

となります（本補題は補題 3.1 の特殊ケースですので，s_n，B_n の詳細はそちらをご覧下さい）．

2.2 期間最大化問題

最良選択問題の e^{-1} と対照的に e^{-2} が重要な役割を果たす問題があります．期間最大化問題 (duration problem) と呼ばれるもので，最良選択問題と同様に，選択の対象になるのは候補者です．時刻 k で候補者を選んだとき，この候補者の保持期間を $(T_k - k)/n$ と定義します．ここで，T_k は時刻 k より後の最初の候補者の出現時刻です（その後，候補者が出現しない場合は $T_k = n + 1$ と解釈します）．総数 n で割っているのは，最良選択問題と比較しやすいように基準化するためです．この問題の目的は保持期間の期待値を最大にする候補者を選ぶことです．次の結果が知られています（[10] 参照）．

補題 2.2（期間最大化問題）：n に依存する定数 $t_n \in \{1, 2, \ldots, n\}$ が存在して，最適ルールは閾値ルール t_n となります．また，そのときの最適値（期待保持期間）を D_n とすると，これらは漸近的には

$$\lim_{n\to\infty} t_n/n = e^{-2}\ (\approx 0.1353),$$
$$\lim_{n\to\infty} D_n = 2e^{-2}\ (\approx 0.2707)$$

となります（本補題は補題 3.2，3.3 の特殊ケースですので，t_n，D_n の詳細はそちらをご覧下さい）．

2.3 順位最小化問題

順位最小化問題 (rank minimization problem) は本稿の主題とは関係ありませんが，その漸近的結果は秘書問題の中でも際立っているので紹介しておきます．選ばれた人の絶対順位（の期待値）を最小化する問題です．最良の絶対順位が 1，最悪が n ですから，この目標はできるだけ良い人を選ぶ基準として適切でしょう．応募者数 n を大きくすると，最適ルールの下で達成される絶対順位の期待値が次の無限積

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j+2}{j}\right)^{\frac{1}{j+1}} \approx 3.8695$$

に近づくことが示されます．なんと平均的には絶対順位 4 以下の人を選ぶことができます．最適ルールは少し複雑です．まず全体の 26 パーセントをパスします．その後，相対順位 1 の応募者が出現すれば直ちに採用しますが，もし 45 パーセントまで面接しても該当者が出現しなければ，その後は相対順位 1 でも 2 でも採用します．さらに，56 パーセントまで該当者が出現しなければ相対順位 3 にまで採用を緩和します．このように時間の進行と共に漸次採用基準を緩和していきます．正確には，

$$t_s = \prod_{j=s}^{\infty}\left(\frac{j+2}{j}\right)^{-\frac{1}{j+1}}, \quad s = 1, 2, \ldots$$

とすると，全体の $100t_s$ パーセントまで面談しても採用が終了しない場合，相対順位 s の応募者の採用が新たに開始されます．数値計算すると，$t_1 = 0.2584\ldots, t_2 = 0.4476\ldots, t_3 = 0.5640\ldots$ ですから，前述のような説明になります（[4,11] 参照）．

3. 対象の数が未知の場合

2.1 節と 2.2 節では応募者総数 n が既知の場合の最良選択問題と期間最大化問題の結果を紹介しました．本節では，これらの問題を n 人の応募者全てが出現するとは限らない場合を含むように一般化します．すなわち，ランダムな時刻 $N(\le n)$ で応募者の出現が途切れるという設定です．確率変数 N は応募者の出現順序とは独立で，事前分布 $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ を持ち，$p_k = P\{N = k\}$，$1 \le k \le n$ は $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$，$p_n > 0$ を満たすものとします．特別な事前分布 $p = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ は 2.1，2.2 節の問題に相当します．

このように出現対象数に不確実性を導入する試みは初期の段階から多くの研究者によってなされました（[12〜14] 参照）が，この場合，最適ルールは事前分布 p に大きく依存し，一般には閾値ルールが最適とはなりません（次節の Irle の例参照）．以下では各問題について閾値ルールが最適となる p の条件を調べ，そのときの閾値および対応する最適値を与えます．

3.1 最良選択問題

応募者数 N が確率変数の場合の最良選択問題は N 人の中のベストを選ぶことを成功と考え，成功確率の最大化を目指します（この場合でも，n 人の中のベストの選択を目指す問題も考えられますが，これは別問題で詳しくは [15] をご覧下さい）．Irle [13] は $n = 8$ のとき，最適ルールが閾値ルールとならない $p = (p_1, p_2, \ldots, p_8)$ の具体例として $p_1 = 0, p_2 = 0.895, p_3 = \cdots = p_7 = 0.001, p_8 = 0.1$ を与えています．このときの最適ルールは最初の応募者（＝候補者）は採用しませんが，2 人目が出現し候補者であれば採用します．しかし，2 人目が候補者でないとき，もし 3 人目が出現して候補者であったとしても採用しません．4 人目以降は候補者が出たら直ちに採用します．これが閾値ルールでないのは明らかです．一般には次の結果が知られています（[16] の Corollary 2.1 参照）．

補題 3.1（最良選択問題）

(i) 最適ルールが閾値ルールとなるための p についての 1 つの十分条件は，任意の可能な j に対して，

$$\frac{p_{k+j}}{p_k} \text{ が } k \text{に関して非増加}$$

となることです．

(ii) p が (i) の条件を満たすとき，対応する閾値 $s_n(p)$ と最適値 $B_n(p)$ は以下のようになります．

$$s_n(p) = \min\left\{k : \sum_{i=k+1}^{n}\left(\sum_{j=k+1}^{i}\frac{1}{j-1}\right)\frac{p_i}{i} \le \sum_{i=k}^{n}\frac{p_i}{i}\right\},$$

$$B_n(p) = (s_n(p)-1)\sum_{i=s_n(p)}^{n}\left(\sum_{j=s_n(p)}^{i}\frac{1}{j-1}\right)\frac{p_i}{i}.$$

3.2 期間最大化問題

応募者数 N が確率変数の場合，期間最大化問題は候補者の保持期間の定義に従って 2 つのモデルが考えられます．2.2 節で確率変数 T_k を導入しましたが，時刻 $k(\le N)$ 以降候補者が出現しなかった場合，$T_k = N+1$

と見るか $T_k = n+1$ と見るかによって 2 つの異なった問題が考えられます．以後，前者をモデル 1，後者をモデル 2 と呼び区別します．事前分布 p が与えられたとき，$1 \le k \le n$ に対して，

$$\begin{aligned}\pi_k =& p_k + p_{k+1} + \cdots + p_n,\\ \sigma_k =& \pi_k + (n-k)p_k\end{aligned}$$

を定義すると以下の結果が得られます（[17] 参照）．

補題 3.2（期間最大化問題モデル 1）

(i) 最適ルールが閾値ルールとなるための p についての 1 つの十分条件は，任意の可能な j に対して，

$$\frac{\pi_{k+j}}{\pi_k} \text{ が } k \text{ に関して非増加}$$

となることです．

(ii) p が (i) の条件を満たすとき，対応する閾値 $t_{n,1}(p)$ と最適値 $D_{n,1}(p)$ は以下のようになります．

$$t_{n,1}(p) = \min\left\{k : \sum_{i=k+1}^{n}\left(\sum_{j=k+1}^{i}\frac{1}{j-1}\right)\frac{\pi_i}{i} \le \sum_{i=k}^{n}\frac{\pi_i}{i}\right\},$$

$$D_{n,1}(p) = \frac{t_{n,1}(p)-1}{n}\sum_{i=t_{n,1}(p)}^{n}\left(\sum_{j=t_{n,1}(p)}^{i}\frac{1}{j-1}\right)\frac{\pi_i}{i}.$$

補題 3.3（期間最大化問題モデル 2）

(i) 最適ルールが閾値ルールとなるための p についての 1 つの十分条件は，任意の可能な j に対して，

$$\frac{\sigma_{k+j}}{\sigma_k} \text{ が } k \text{ に関して非増加}$$

となることです．

(ii) p が (i) の条件を満たすとき，対応する閾値 $t_{n,2}(p)$ と最適値 $D_{n,2}(p)$ は以下のようになります[1]．

$$t_{n,2}(p) = \min\left\{k : \sum_{i=k+1}^{n}\left(\sum_{j=k+1}^{i}\frac{1}{j-1}\right)\frac{\sigma_i}{i} \le \sum_{i=k}^{n}\frac{\sigma_i}{i}\right\},$$

$$D_{n,2}(p) = \frac{t_{n,2}(p)-1}{n}\sum_{i=t_{n,2}(p)}^{n}\left(\sum_{j=t_{n,2}(p)}^{i}\frac{1}{j-1}\right)\frac{\sigma_i}{i}.$$

4．2 つの問題を結ぶ事前分布列

3 節の 3 つの補題は形が似ていますね．補題 3.1 の p_i を $\pi_i/n, \sigma_i/n$ で置き換えると補題 3.2, 3.3 が得られます．最良選択問題と期間最大化問題の間に何か面白い関係がありそうです．それを見ていきましょう．2 つの特別な事前分布を次のように与えます．

$$\begin{aligned}p^{(0)} =& (0, 0, \ldots, 0, 1),\\ p^{(1)} =& \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

$p^{(0)}$，$p^{(1)}$ はそれぞれ，応募者数が既知の場合と一様分布に従う場合を表しています．補題 3.2 で $p = p^{(0)}$ と置いた結果と補題 3.1 で $p = p^{(1)}$ と置いた結果を比較してみると，閾値ルールの最適性を前提とすれば（実際，前提は満たされます），両者の閾値と最適値が一致します．すなわち，

$$\begin{aligned}t_{n,1}(p^{(0)}) =& s_n(p^{(1)}),\\ D_{n,1}(p^{(0)}) =& B_n(p^{(1)})\end{aligned}$$

が成立しています．それでは，補題 3.2 で $p = p^{(1)}$ と置いたときの閾値に一致する補題 3.1 の分布 $p^{(2)} = (p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \ldots, p_n^{(2)})$ は何でしょうか？　[18] はそれが

$$p_k^{(2)} = \frac{2(n-k+1)}{n(n+1)}$$

であることを示しました．ただし，この場合，最適値は完全には一致しません，定数倍の差があります．次のようになります．

$$\begin{aligned}t_{n,1}(p^{(1)}) =& s_n(p^{(2)}),\\ D_{n,1}(p^{(1)}) =& \frac{n+1}{2n}B_n(p^{(2)}).\end{aligned}$$

[18] は，この交互対応が無限に続くことを示しましたが，その分布列 $p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots$ の一般形 $p^{(m)} = (p_1^{(m)}, p_2^{(m)}, \ldots, p_n^{(m)})$ を求めるには至っていません．[19] は，$m \ge 1$ に対してこれが次のように与えられることを示しました．

$$p_k^{(m)} = \frac{\binom{n+m-1-k}{m-1}}{\binom{n+m-1}{m}}. \qquad (1)$$

以上は，期間最大化問題モデル 1 と最良選択問題の間の関係ですが，同様の関係が期間最大化問題モデル 2 と最良選択問題の間にも見られます．この場合の分布列 $p^{[m]} = (p_1^{[m]}, p_2^{[m]}, \ldots, p_n^{[m]})$ は，$m \ge 1$ に対して次式で与えられます（これも [19] 参照）．

$$p_k^{[m]} = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^m - \left(\frac{n-k}{n}\right)^m.$$

$m = 0$ のときは $p^{[0]} = p^{(0)}$ とします．面白いことに，

[1] [17] では最適ルールが閾値ルールとなるための十分条件が別の形（モデル 1 は Theorem 3.1，モデル 2 は Theorem 4.1）で与えられていて，補題 3.2(i) や補題 3.3(i) の形では与えられていません．しかし，[17] の Remark 4.1 と [16] の Corollary 2.1 に注意すれば，Theorem 3.1 と Theorem 4.1 から直ちに補題 3.2(i)，補題 3.3(i) が得られます．

この場合は両者の閾値と最適値が完全に一致します．

対応関係を改めて整理すると次のようになります．

定理 4.1　$m \geq 0$ とする．

(i) 最良選択問題および期間最大化問題（モデル 1 およびモデル 2）に対して，事前分布 $p^{(m)}$，$p^{[m]}$ の最適ルールは閾値ルールになります．

(ii) 期間最大化問題モデル 1 と最良選択問題の間に次の関係が成立します．

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\quad t_{n,1}(p^{(m)})=s_n(p^{(m+1)})\\&\text{(b)}\ D_{n,1}(p^{(m)})=\frac{n+m}{n(m+1)}B_n(p^{(m+1)})\end{aligned}$$

(iii) 期間最大化問題モデル 2 と最良選択問題の間に次の関係が成立します．

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\quad t_{n,2}(p^{[m]})=s_n(p^{[m+1]})\\&\text{(b)}\ D_{n,2}(p^{[m]})=B_n(p^{[m+1]})\end{aligned}$$

この定理の証明は簡単です．分布が次の性質

$$\begin{aligned}p_k^{(m+1)}&=\frac{m+1}{m+n}\pi_k^{(m)},\\p_k^{[m+1]}&=\frac{1}{n}\sigma_k^{[m]}\end{aligned}$$

を満たすことに気づけば (ii)，(iii) は補題 3.1～3.3 の (ii) から直ちに示されます．ただし，$\pi_k^{(m)}, \sigma_k^{[m]}$ は各々 $p^{(m)}, p^{[m]}$ に対して定義される π_k, σ_k を表しています．また，$p^{(m)}$ と $p^{[m]}$ が補題 3.1～3.3 の (i) を満たすことは直接計算で示すことができます．

4.1　漸近挙動

定理 4.1 において，n を大きくしたときの閾値および最適値の漸近挙動を調べましょう．事前分布 $p^{(m)}, p^{[m]}$ に対応する確率変数を $N^{(m)}$, $N^{[m]}$ で表すと，これらは壺からのボールの抽出に関係した確率変数であることがわかります．1 から $n+m-1$ までの番号が付された $n+m-1$ 個のボールが壺に入っているとします．ここから m 個のボールを非復元抽出するとき，$N^{(m)}$ は抽出されたボールの中の最小の番号を表します．これは

$$p_k^{(m)} = \frac{\binom{n+m-k}{m} - \binom{n+m-1-k}{m}}{\binom{n+m-1}{m}}$$

と書けることから明らかです．他方 $N^{[m]}$ は 1 から n までの番号が付された n 個のボールが入った壺から，復元的に m 回ボールを抽出するとき，抽出されたボールの中の最小の番号を表します．したがって，定理 4.1 は壺からボールを抽出する問題に関連した分布列が最良選択問題と期間最大化問題を交互に仲介することを示しています．さらに，モデル 1 が非復元抽出に，モデル 2 が復元抽出に対応していることも示しています．

このことからわかるように m を固定して n を大きくすると，$N^{(m)}$ と $N^{[m]}$ の間に差がなくなります．正確には $N^{(m)}/n$ と $N^{[m]}/n$ は $n \to \infty$ のとき，同じ確率変数 V_m に収束し，密度関数 $f_{V_m}(v) = m(1-v)^{m-1}, 0 < v < 1$ を持ちます（このことは，$Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ が区間 $(0,1)$ 上で一様に分布する独立確率変数列とすると，V_m が $\min\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$ と同じ分布に従うことを示しています）．直接確かめることもできます．(1) より

$$np_k^{(m)}=m\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n+m-1}\right) \quad (2)$$

と書けるので，$v = k/n$ と置いて $n, k \to \infty$ とすると $np_k^{(m)} \to f_{V_m}(v)$ となります．$np_k^{[m]} \to f_{V_m}(v)$ も同様に示すことができます．

閾値および最適値に関して，次のように極限を定義します．

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{s_n(p^{(m)})}{n}=s^{(m)}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{s_n(p^{[m]})}{n}=s^{[m]},\\&\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n,1}(p^{(m)})}{n}=t_1^{(m)}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{t_{n,2}(p^{[m]})}{n}=t_2^{[m]},\\&\lim_{n\to\infty}B_n(p^{(m)})=B^{(m)}, \quad \lim_{n\to\infty}B_n(p^{[m]})=B^{[m]},\\&\lim_{n\to\infty}D_{n,1}(p^{(m)})=D_1^{(m)}, \quad \lim_{n\to\infty}D_{n,2}(p^{[m]})=D_2^{[m]}.\end{aligned}$$

詳細は省きますが，漸近的に $N^{(m)}$ と $N^{[m]}$ の間に差がなくなることから

$$s^{(m)} = s^{[m]}, \quad B^{(m)} = B^{[m]} \quad (3)$$

が成立することは明らかです．定理 4.1(ii)，(iii) の等式は任意の n に対して成立するので，極限においても成立します．その結果と (3) とから直ちに次の結果を得ます．

定理 4.2　正整数 m に対して以下が成立します．

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\ t_1^{(m)} = s^{(m+1)}\\&\text{(b)}\ D_1^{(m)} = \frac{1}{m+1}B^{(m+1)}\\&\text{(c)}\ t_2^{[m]} = s^{(m+1)}\\&\text{(d)}\ D_2^{[m]} = B^{(m+1)}\end{aligned}$$

定理 4.2 は，正整数 m に対して，最良選択問題の系列 $(s^{(m)}, B^{(m)})$ を求めておけば，2 つの期間最大化問題の系列 $(t_1^{(m)}, D_1^{(m)})$ および $(t_2^{[m]}, D_2^{[m]})$ が，それから計算できることを示しています．

また，定理 4.2 の (b)，(d) から

$$D_2^{[m]} = (m+1)D_1^{(m)} \tag{4}$$

を得ますが，これはパラメータが m のとき，モデル 2 の最適値がモデル 1 の最適値の $m+1$ 倍になることを示しています．モデル 1 の計画期間は V_m で，その期待値は $E[V_m] = 1/(m+1)$ ですから，(4) は次のように表現することもできます．

補題 4.1

$$D_2^{[m]} = \frac{D_1^{(m)}}{E[V_m]}.$$

右辺はモデル 1 の基準化された保持時間とでも呼ぶべき値ですので，この補題はそれがモデル 2 の保持時間に等しくなることを述べています．また，閾値に関しては定理 4.2(a)，(c) より両モデルに対して等しくなっています．一般には 2 つのモデルの閾値は等しくなりません（例えば [17] の Lemma 3.2 と Lemma 4.2 参照）．

$(s^{(m)}, B^{(m)})$ を具体的に求めてみましょう．補題 3.1(ii) で $s_n(p)$ を s で置き換えたものを $B_{n,s}(p)$ と書きましょう．すなわち，

$$B_{n,s}(p) = \frac{s-1}{n}\sum_{i=s}^{n}\left(\sum_{j=s}^{i}\frac{1}{j-1}\right)\frac{np_i}{i}$$

です．これは，事前分布が p で閾値ルール s を用いたときの成功確率を表します．したがって，$p = p^{(m)}$ のとき，$x = s/n$ と置いて $n, s \to \infty$ とし，(2) を適用すると

$$\begin{aligned} B_{n,s}(p^{(m)}) &= \frac{s-1}{n}\sum_{i=s}^{n}\left(\sum_{j=s}^{i}\frac{1}{j-1}\right)\frac{np_i^{(m)}}{i} \\ &\to x\int_x^1 \left\{\int_x^v \frac{1}{y}dy\right\}\frac{m(1-v)^{m-1}}{v}dv \end{aligned}$$

となります．この積分を $x\,(0 < x < 1)$ の関数と見て，$B^{(m)}(x)$ と書きます．詳細は省きますが，$h_k = \sum_{j=1}^{k} 1/j,\ k \geq 1,\ h_0 = 0$ と定義し，さらに

$$\Phi^{(m)}(x) = \frac{1}{2}\log^2 x + h_{m-1}\log x + \sum_{j=1}^{m}\frac{h_{m-1}-h_{j-1}}{j(1-x)^{-j}}$$

を定義すると，$B^{(m)}(x)$ は次のように表されます．

補題 4.2

$$B^{(m)}(x) = mx\Phi^{(m)}(x).$$

$s^{(m)}$ は $B^{(m)}(x)$ を最大にする x ですから，$dB^{(m)}(x)/dx = 0$ の根として求められます．また最適値は $B^{(m)} = B^{(m)}(s^{(m)})$ で与えられます．まとめると次のようになります．

定理 4.3

(i) $s^{(m)}$ は次の方程式の根 x として与えられます．

$$\Phi^{(m)}(x) + \log x + \frac{h_{m-1}}{(1-x)^{-m}} + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{h_j x}{(1-x)^{-j}} = 0.$$

(ii) 最適値は次式で与えられます．

$$B^{(m)} = ms^{(m)}\Phi^{(m)}(s^{(m)}).$$

次表でいくつかの m に対して $(s^{(m)}, B^{(m)})$ の数値例を与えておきます[2]．

表 1　m を与えたときの $s^{(m)}$ と $B^{(m)}$ の値

m	1	2	3	4	5	10
$s^{(m)}$	.135	.078	.054	.041	.033	.017
$B^{(m)}$	.271	.253	.247	.244	.241	.237

本稿では無情報型に話を限定しましたが，完全情報型に関しても同様の対応関係が成立します．特に期間最大化問題に関しては [20] をご覧下さい．

5. 秘書問題に関連したゲーム

多くの研究者が秘書問題に関連したゲームを論じています．ここでは，3.1 節の最良選択問題に関連した Hill and Krengel [21] のモデルを紹介します．3.1 節では応募者数 N の事前分布 $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ が所与でしたが，Hill and Krengel は事前分布 p が悪意を持って選ばれることを想定し，採用者はそれにどう対処すべきかを論じています．採用者の選択ルールをベクトル $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ で表します．これは時刻 j に出現した応募者が候補者のとき，それを確率 $q_j \in [0,1],\ 1 \leq j \leq n$ で選ぶというルールです．閾値ルールは $q = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$ と表されますから，この選択ルールは閾値ルールを含むより広いクラスを表しています．

例えば $n = 5$ の場合，最適なルールは $q^* = \left(\frac{26}{75}, \frac{26}{49}, 1, 1, 1\right)$ で与えられます．最初の応募者（これ

[2] 本節の詳細については [19] をご覧下さい．[18] は非常に一般的な枠組みの下，最良選択問題と期間最大化問題モデル 1 を仲介する事前分布のシンボリックな対応関係を与えましたが，本節で与えたような分布の具体的導出およびそのときの漸近的挙動には触れていません．また，モデル 2 への言及もありません．

は必然的に候補者です）を 26/75 の確率で採用します．採用できなかった場合，2 番目の応募者が出現して候補者であれば，26/49 の確率で採用します．もし，最初の 2 人が採用できなかったら，3 番目以降は候補者が出たら直ちに採用するというものです．このルール q^* を用いれば，どんな事前分布 p に対しても成功確率を 26/75 以上にすることができます．逆に，事前分布 $p^* = \left(\frac{13}{75}, \frac{2}{75}, 0, 0, \frac{60}{75}\right)$ が選ばれると，採用者はどんな採用ルール q を選んでも成功確率を 26/75 以上にすることはできません．この意味で (p^*, q^*) はミニマックス解となっています．Hill and Krengel は一般の n に対して (p^*, q^*) を明示的に求めています．興味ある読者は 3.2 節の期間最大化問題に対して，同様なゲームを考えてみてはいかがでしょうか？　筆者が知る限りまだ解かれていません．

謝辞　本稿の執筆に際しては，宍太克則教授から貴重な協力と助言をいただきました．厚く感謝致します．また，表 1 の作成に協力しコメントを寄せていただいた王琦さんにもこの場を借りてお礼申し上げます．

参考文献

[1] T. S. Ferguson, “Who solved the secretary problem?” *Statistical Science*, **4**, 282–289, 1989.

[2] D. V. Lindley, “Dynamic programming and decision theory,” *Applied Statistics*, **10**, 39–52, 1961.

[3] E. B. Dynkin, “The optimum choice of the instant for stopping a Markov process,” *Soviet Mathematics Doklady*, **4**, 627–629, 1963.

[4] Y. S. Chow, S. Moriguti, H. Robbins and S. M. Samuels, “Optimal selection based on relative rank (The “secretary problem”),” *Israel Journal of Mathematics*, **2**, 81–90, 1964.

[5] J. P. Gilbert and F. Mosteller, “Recognizing the maximum of a sequence,” *Journal of the American Statistical Association*, **61**, 35–73, 1966.

[6] S. M. Samuels, “Secretary problems,” *Handbook of Sequential Analysis*, B. K. Gosh and P. K. Sen (eds.), Marcel Dekker, pp. 381–405, 1991.

[7] 玉置光司，“秘書問題の諸相と最近の展開，” 応用数理，**12**, 43–56, 2002.

[8] 坂口実，“秘書問題とその周辺 “Secretary” problems and their related areas,” *Journal of Economics and Management*, **42**, 85–137, 1998.

[9] J. Preater, “On multiple choice secretary problems,” *Mathematics of Operations Research*, **19**, 597–602, 1994.

[10] T. S. Ferguson, J. P. Hardwick and M. Tamaki, “Maximizing the duration of owning a relatively best object,” *Strategies for Sequential Search and Selection in Real Time*, (Contemporary Mathematics 125), American Mathematical Society, pp. 37–57, 1992.

[11] T. S. Ferguson, Optimal Stopping and Applications, http://www.math.ucla.edu/~tom/Stopping/Contents.html（2015 年 2 月 2 日閲覧）

[12] E. L. Presman and I. M. Sonin, “The best choice problem for a random number of objects,” *Theory of Probability and Its Applications*, **17**, 657–668, 1972.

[13] A. Irle, “On the best choice problem with random population size,” *Zeitschrift für Operations Research*, **24**, 177–190, 1980.

[14] J. D. Petruccelli, “On the best-choice problem when the number of observations is random,” *Journal of Applied Probability*, **20**, 165–171, 1983.

[15] E. Samuel-Cahn, “The best-choice secretary problem with random freeze on jobs,” *Stochastic Processes and Their Applications*, **55**, 315–327, 1995.

[16] M. Tamaki, “Maximizing the probability of stopping on any of the last m successes in independent Bernoulli trials with random horizon,” *Advances in Applied Probability*, **43**, 760–781, 2011.

[17] M. Tamaki, “Optimal stopping rule for the no-information duration problem with random horizon,” *Advances in Applied Probability*, **45**, 1028–1048, 2013.

[18] A. V. Gnedin, “Objectives in the best-choice problems,” *Sequential Analysis*, **24**, 177–188, 2005.

[19] M. Tamaki, “Urn sampling distributions giving alternate correspondence between two optimal stopping problems,” in preparation.

[20] M. Tamaki, “Optimal stopping rule for the full-information duration problem with random horizon,” *Advances in Applied Probability*, **48**, 2016, to appear.

[21] T. P. Hill and U. Krengel, “Minimax-optimal stop rules and and distributions in secretary problems,” *The Annals of Probability*, **19**, 342–353, 1991.