初歩から学ぶゲーム理論
—ORにおけるゲーム理論入門—

渡辺　隆裕

本稿は，ゲーム理論の入門として，戦略形ゲームの基本的な考え方と概念を紹介する．戦略形ゲームの定式化と例を示し，ゲームの解として戦略の支配とナッシュ均衡について説明する．またパレート最適と囚人のジレンマ，支配可解によるゲームの解，混合戦略とミニマックス戦略についても説明する．

キーワード：戦略形ゲーム，支配戦略，パレート最適，支配可解，ナッシュ均衡，ミニマックス戦略

1. はじめに

本稿は，ゲーム理論の基本的な考え方を紹介することを目的としている．ゲーム理論の入門記事はいくつかあり，筆者も幾度となく執筆しているが（[1] など），本稿では以下の点に特に注意して原稿を執筆した．まず第 1 に，本誌特集「はじめようゲーム理論」の他の記事を読み進めるための基礎知識を提供することを目的とし，その連携を考慮した．第 2 に OR の研究者が使うことを考え，ゲームの「理論」が工学的応用として使いやすい場合とそうでない場合に注意して，ゲームの解の概念を解説した．第 3 に，OR でよく考えられる「最適」という概念と，「ゲームの解」の違いを強調した．

本稿が，ゲーム理論を学びたい読者の良いガイドとなれば幸いである．

2. 非協力ゲームにおける戦略形ゲーム

ゲーム理論は，大きく非協力ゲームと協力ゲームに分かれる．非協力ゲームは，各プレイヤーが戦略を選び，その戦略の組合せでプレイヤーの利得が決定する．これに対し協力ゲームには戦略という考えはなく，プレイヤーの集合である提携に対応して利得が 1 つ定まる．非協力ゲームは，各プレイヤーがどのような戦略を選ぶかを考え，協力ゲームは，各プレイヤーにどのように利得が配分されるか（されるべきか）を考える．非協力ゲームはさらに戦略形ゲームと展開形ゲームという 2 つの表現形式を持っている．展開形ゲームは戦略形ゲームを含んだ「より一般的な表現」であるのに対し，戦略形ゲームは標準形ゲームとも呼ばれ「より基本的な表現」に位置づけられる．本稿では非協力ゲームの戦略形ゲームについて解説する．協力ゲームについては，本誌で岸本氏が「協力ゲーム理論入門」を執筆しているので，そちらを参照していただきたい．

3. 戦略形ゲームの例と定式化

以下，戦略形ゲームの例を示そう．

戦略形ゲームの例（ゲーム 1）：大手喫茶店のダタールとスターボックス（以下スタボ）は，まだお店のない 2 つの地域 A と B のどちらに出店すべきか考えている．A 地域の喫茶店の 1 日の利用客は 600 人，B 地域は 300 人である．両店舗が別々の地域に出店すれば，その利用客をすべて獲得できる．両店舗が同じ地域に出店すれば，地域のお客の取り合いとなるが，この場合はスタボがダタールの 2 倍の客を獲得できるとする．ダタールとスタボはどちらか 1 地域のみに出店するとし，両方出店することや，出店しないことは考えない．利用客を多く獲得するためには，2 つの喫茶店はどちらに出店すれば良いだろうか．なお，ここでは 2 つの喫茶店とも同時に行動すると考える．

このゲームにおけるプレイヤーは，ダタールとスタボである．以下，ダタールをプレイヤー 1，スタボをプレイヤー 2 と呼ぶことにし，1，2 で表すことにしよう．戦略は「A 地域に出店する」「B 地域に出店する」のそれぞれ 2 つである．プレイヤー $i (i = 1, 2)$ が A 地域，B 地域に出店する戦略は，それぞれ A_i，B_i という記号で表すことにする．各プレイヤーの利得と戦

わたなべ　たかひろ
首都大学東京大学院経営学専攻
〒 206–0081 東京都八王子市南大沢 1–1

表 1　ゲーム 1 の利得行列：喫茶店の出店ゲーム

1 \ 2	A_2	B_2
A_1	(200,400)	(600,300)
B_1	(300,600)	(100,200)

略は表 1 の利得行列で表現できる．利得行列では，プレイヤー 1 は行を選び，プレイヤー 2 は列を選ぶ．各プレイヤーが選択した行と列の交差するセルには，各プレイヤーの利得が表されており，左にプレイヤー 1，右にプレイヤー 2 の利得が書かれている．例えば，プレイヤー 1 が B_1 を選び，プレイヤー 2 が A_2 を選べば，プレイヤー 1 は 300，プレイヤー 2 は 600 の利得を獲得できることがわかる．

一般的に，戦略形ゲームは，プレイヤー，戦略，利得の 3 つの要素から構成される．ここで，プレイヤーの集合を $N = \{1, \ldots, n\}$，プレイヤー $i \in N$ の戦略の集合 S_i としよう．各プレイヤー $i \in N$ は，S_i から戦略を同時に選び，その結果として各プレイヤーの利得が決まる．各プレイヤーの利得は，利得関数で表現される．ここでプレイヤーの戦略の集合の直積を $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ とする．$s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ は戦略の組と呼ばれる．プレイヤー $i \in N$ の利得関数は，戦略の組に対応するプレイヤーの利得を定める関数 $u_i : S \to \mathbb{R}$ である．

戦略形ゲームは以上の 3 要素 $(N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$ によって定められる．ゲーム 1 を例とすると，プレイヤーの集合は $N = \{1,2\}$ で，プレイヤー i の戦略の集合は $S_i = \{A_i, B_i\}$ で表される．利得関数を表にしたものが表 1 の利得行列と考えられる．例えば $u_1(B_1, A_2) = 300$，$u_2(B_1, A_2) = 600$ である．プレイヤーが 2 人 $(|N| = 2)$ のゲームは 2 人ゲームと呼ばれ，その中でもゲーム 1 のように各プレイヤーの戦略が 2 つずつ $(|S_1| = |S_2| = 2)$ のゲームは，2×2 ゲームと呼ばれる．

4.　ゲームの解

戦略形ゲームでは，各プレイヤーは戦略を同時に選ぶと考える．各プレイヤーが選ぶと予測される戦略の組，もしくはその集合をゲームの解と呼ぶ．

ゲーム 1 では，何がゲームの解になるのだろうか．講義などでこの質問をすると，以下のような 3 つの考え方をもとに「プレイヤー 1 は A_1 を選ぶ」とする答が多い．

- マキシミニ基準（悲観的意思決定）：A_1 を選ぶと最悪で 200，B_1 を選ぶと最悪 100 なので A_1 を選択する．
- マックスマックス基準（楽観的意思決定）：A_1 を選ぶと最高で 600，B_1 を選ぶと最高で 300 なので A_1 を選択する．
- 平均値基準：平均を考えると A_1 は 400，B_1 は 200 となるので A_1 を選択する．

上記の 3 つの基準のどれを選んでも，プレイヤー 1 は A_1 を選ぶことが答となる．しかしながら，ゲーム理論では B_1 を選ぶことが解になる．

なぜそうなるかをこれから説明していくわけだが，ゲーム 1 は「1 人の意思決定」と「複数の意思決定主体の相互作用であるゲーム」との違いを説明する良い例題である．プレイヤー 1 が，プレイヤー 2 の選択を「お天気」や「市場」と同じ不確実な事象と見ている場合は上記の基準も当てはまる．しかしゲーム理論では，プレイヤー 1 が，プレイヤー 2 の選択は不確実な事象ではなく，意思決定の結果であると考えるため，異なった考え方になるのである．

5.　戦略の支配

では具体的にゲームの解はどのような戦略の組と考えるべきであろうか．それを解くための 1 つ目の考え方は戦略の支配である．

以下，説明のためにゲーム理論でよく用いられる記法を導入する．プレイヤー i 以外の戦略の集合の直積を，

$$S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$$

とする．$s_{-i} \in S_{-i}$ は，プレイヤー i 以外の戦略の組 $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots s_n)$ を表す．

さらに $(t_i, s_{-i}) \in S$ は「プレイヤー i は戦略 $t_i \in S_i$ を選び，プレイヤー i 以外は戦略 $s_{-i} \in S_{-i}$ を選んでいる戦略の組」を表すとする．すなわち

$$(t_i, s_{-i}) = (s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots s_n)$$

である．$s = (s_1, \ldots, s_n)$ と (s_i, s_{-i}) は同じである．

プレイヤー i の戦略 $t_i \in S_i$ が $r_i \in S_i$ を弱支配するとは，i 以外のプレイヤーのどんな戦略の組 $s_{-i} \in S_{-i}$ に対しても

$$u_i(t_i, s_{-i}) \geq u_i(r_i, s_{-i})$$

が成立し，かつ少なくとも 1 つの $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して

$$u_i(t_i, s_{-i}) > u_i(r_i, s_{-i})$$

が成立することを言う．

なお 1 番目の条件だけが成立し，2 番目の条件

表 2　プレイヤー 1 の利得を伏せたゲーム 1 の利得行列

1 \ 2	A_2	B_2
A_1	(*,400)	(*,300)
B_1	(*,600)	(*,200)

が成立しなければ，すべての $s_{-i} \in S_{-i}$ に対して $u_i(t_i, s_{-i}) = u_i(r_i, s_{-i})$ となる．この場合は t_i と r_i は戦略的同等であると言い，プレイヤー i は t_i と r_i のどちらを選ぶかを決められない状況になる．以下，戦略的同等な戦略がないようなゲームのみを考える[1].

ゲームを解くための 1 つ目の考え方は，どのプレイヤーも，ある戦略に弱支配された戦略は選択しないという考え方である．ゲーム 1 において，もしプレイヤー 1 が A_1 を選ぶならばプレイヤー 2 は B_2 を選ぶより A_2 を選んだほうが利得が高く，もしプレイヤー 1 が B_1 を選ぶとしてもプレイヤー 2 は B_2 より A_2 のほうが利得が高い．すなわちプレイヤー 2 の戦略 A_2 は戦略 B_2 を弱支配している．したがってプレイヤー 2 は B_2 を選ばず，A_2 を選ぶと考えるのである．

ある戦略が，そのプレイヤーの他のすべての戦略を弱支配しているとき，その戦略はそのプレイヤーの弱支配戦略と呼ばれる．弱支配戦略があれば，プレイヤーはそれを選ぶと考える．ゲーム 1 において，A_2 はプレイヤー 2 の弱支配戦略であるので，プレイヤー 2 は A_2 を選ぶ．弱支配戦略があるときは，プレイヤーは相手の行動に依存せずに自分の最適な行動を決めることができる．その意味で弱支配戦略はゲーム的な意思決定ではなく，個人の意思決定の基準であると言える．このことを明確にするためには表 2 のような利得行列を考えて見れば良い．このゲームではプレイヤー 1 の利得が書かれておらず，どんな行動をするかわからないが，たとえどんな行動をしてもプレイヤー 2 は A_2 を選ぶことが良いことがわかる．

これからわかるように「弱支配戦略があればプレイヤーはそれを選ぶ」という予測は，かなり妥当である．本誌で岩崎氏執筆の「マッチング」や福田氏執筆の「オークション」では，正直な申告が弱支配戦略になる「耐戦略性」という性質が重要であることが述べられている．

[1] i 以外のプレイヤーのどんな戦略の組 $s_{-i} \in S_{-i}$ に対しても

$$u_i(t_i, s_{-i}) > u_i(r_i, s_{-i})$$

が成立するならば，$t_i \in S_i$ が $r_i \in S_i$ を強支配すると呼ぶ．文献によっては強支配を単に支配と呼ぶことも多い．$t_i \in S_i$ が $r_i \in S_i$ を強支配するならば，弱支配している．

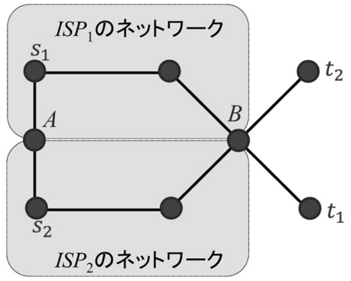

図 1　ISP ゲームのネットワーク

表 3　ISP ゲームの利得行列

ISP_1 \ ISP_2	A	B
A	$(-4,-4)$	$(-1,-5)$
B	$(-5,-1)$	$(-2,-2)$

6. 囚人のジレンマとパレート最適

弱支配戦略は，相手の利得や行動に関係なくプレイヤーにとって良い戦略で，個人にとって「最適」に近い戦略であると述べたが，単純に最適とは呼べない状況が存在する．それが囚人のジレンマである．囚人のジレンマは，一般には囚人をプレイヤーとしたストーリーで説明される（[2] などを参照）が，[3] は囚人のジレンマをネットワークのルーティングポリシーの問題として表した ISP ゲームと呼ばれる面白い例を示している．以下にそれを紹介しよう．

2 つの ISP(Internet Service Provider) が，ネットワークにトラフィックを送ろうとしている．ネットワークのいくつかの枝は，図 1 で表されるように ISP_1 か ISP_2 のネットワークに属しているが，各 ISP のネットワークの枝を 1 単位のトラフィックが流れると，その ISP は枝 1 つにつき費用 1 を負担するものとする．ここで各 ISP_i は自分のノードである s_i から t_i へ 1 単位のトラフィックを送る．このとき各 ISP はノード A を経由するルートとノード A を経由しないルートのどちらを選ぶべきか．

このゲームの利得行列は表 3 のようになる．A を通るルーティングは，できるだけ早く自分以外のネットワークへトラフィックを渡してしまうというポリシーで，ホットポテトと呼ばれる．熱いじゃがいもを手で持つと火傷するから，早く別の人に渡してしまえ，という訳である．相手が A を選ぶと，自分は A（利得 -4）を選ぶほうが B（利得 -5）を選ぶより良く，相手が B を選んでも，自分は A（利得 -1）を選ぶほう

が B（利得 -2）を選ぶより良い．相手のすべての戦略に対して，A は B よりも良く，A のホットポテトを選ぶことが弱支配戦略になっている．

しかしながら両 ISP が A を選ぶことは，両 ISP が B を選ぶことより悪くなっている．つまり個人の最適な選択が，プレイヤー全体にとって良い結果を導かない．このようにゲーム理論を用いれば，個人の最適な行動とプレイヤー全体にとって良い結果のずれを認識でき，そのずれを少なくするような全体のシステムの設計を考えることができる．

プレイヤー全体にとって良い結果とはどのように測るのであろうか．ここで戦略の組 $s, r \in S$ に対して，すべての $i \in N$ に対して $u_i(s) \geq u_i(r)$ で，かつ少なくとも 1 人の $i \in N$ に対して $u_i(s) > u_i(r)$ が成立するとき，s は r をパレート支配すると呼ぶ．少なくともパレート支配された結果は，プレイヤー全体にとって良い結果ではない．両 ISP が A を選ぶ戦略の組 (A, A) は，両 ISP が B を選ぶ戦略の組 (B, B) にパレート支配されている．(A, A) より (B, B) のほうが，すべてのプレイヤーにとって良いのだから，支配戦略で選ばれた (A, A) は，プレイヤー全体にとって良い結果ではないと言える．

(A, A) は良くない結果だが，ではどれが良い結果と言えるのか？　経済学では個人間の効用は比較できないから，すべての個人にとってそれよりも良い結果が存在しない限り，その結果は悪くないと考える．どの戦略の組にもパレート支配されない戦略の組はパレート最適であると呼ばれる．上記のゲームでは (A, B)，(B, A)，(B, B) の 3 つの戦略の組はパレート最適である．

パレート最適性の考え方では，この 3 つに優劣はつけられないが，実用性から考えれば，もう少しラフな基準を用いて結果を絞りたいところである．例えば利得が効用のような計測不能なものではなく，時間や金銭などで表されるならば，全員の利得の和が最大（コストの和が最小）という基準で全体の最適性を測ることもできる．例えば，上記ゲームにおいて利得の和で全体の最適性を測るならば (B, B) の利得の和が -4 で最大となり，プレイヤー全体にとって良い結果であると言える．

本誌で河瀬・牧野両氏が執筆する「無秩序の代償」は，このような考え方を用いて，個人の最適な行動の結果と全体の最適性のずれについて論じている．

7. 支配可解によるゲームの解

さてゲーム 1 において，プレイヤー 1 の 2 つの戦略には弱支配の関係はなく，プレイヤー 2 の行動によって最適な行動は変わる．プレイヤー 1 は，どのような行動を選ぶと考えられるであろうか．プレイヤー 1 が「プレイヤー 2 は弱支配戦略 A_2 を選ぶ」と考えるならば，プレイヤー 1 は A_1 を選ぶ（利得は 200）より，B_1 を選ぶ（利得は 300）ほうが利得は高い．したがってプレイヤー 1 は B_1 を選ぶと考え，ゲーム 1 の解は「プレイヤー 1 が B_1 を選び，プレイヤー 2 が A_2 を選ぶ」と考えることができるのである．

これを一般化したものが，支配された戦略の逐次削除という考え方である．いま，プレイヤー i の戦略の集合 S_i の部分集合の列 S_i^k を

$$
\begin{aligned}
&S_i^0 = S_i, \\
&S_i^k = \{s_i \in S_i^{k-1} \mid \forall t_i \in S_i^{k-1}, \\
&\quad \exists s_{-i} \in S_{-i}^{k-1}\ u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(t_i, s_{-i}) \\
&\quad \text{or } \forall s_{-i} \in S_{-i}^{k-1}\ u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(t_i, s_{-i})\}
\end{aligned}
$$

$(k \geq 1)$ と定義する．すなわちゲーム $G^{k-1} = (N, \{S_i^{k-1}\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N})$ を元のゲームのプレイヤーの戦略を部分集合 $\{S_i^{k-1}\}_{i \in N}$ に制限したゲームと考え，そのゲーム G^{k-1} において弱支配される戦略を削除した戦略の集合（すなわち支配されない戦略の集合）を S_i^k とする．このとき $S_i^0 \supseteq S_i^1 \supseteq S_i^2 \cdots$ であるので，ゲームの戦略集合 S_i が有限であれば，ある $m \geq 0$ が存在して $S^m = S^{m+1} = \cdots$ となる．ここで任意の i について，S_i^m の要素が 1 つであれば，そのゲームは支配可解であると呼ぶ．このとき，その要素を s_i^* と定義する（すなわち，$S_i^m = \{s_i^*\}$）．また，このときの $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ はゲームの解であると考える．さらに，このときの m を解が得られるレベルと呼ぶ．

例えば，ゲーム 1 では $S_1^0 = \{A_1, B_1\}$,$S_2^0 = \{A_2, B_2\}$ となり，プレイヤー 2 の B_2 は A_2 に弱支配されるので削除されて $S_1^1 = \{A_1, B_1\}$,$S_2^1 = \{A_2\}$ となる．ここでゲーム G^1 ではプレイヤー 1 の A_1 は B_1 に弱支配されるので $S_1^2 = \{B_1\}$，$S_2^2 = \{A_2\}$ となる．ゲームは支配可解であり，ゲームの解は (B_1, A_2)，解が得られるレベルは 2 であることがわかる．

すべてのプレイヤーに弱支配戦略がある場合は支配可解であり，弱支配戦略以外の戦略がすべて 1 回で削除される（レベルは 1）．すなわち全員が弱支配戦略を選ぶ．支配可解なゲームでは，そのレベルが大きくなるほど，ゲームの解がプレイされるために多くの仮定を必要とする．例えばゲーム 1 を考えてみよう．すでに述べたようにプレイヤー 2 はプレイヤー 1 の利得や行動に関係なく，弱支配戦略 A_2 を選ぶことができる．

表 4　ゲーム 2 の利得行列：両性の戦い

1 \ 2	A_2	B_2
A_1	(1,2)	(0,0)
B_1	(0,0)	(2,1)

これに対してプレイヤー 1 は，プレイヤー 2 の利得を知らなければ B_1 が良いと推論できないし，たとえプレイヤー 2 の利得を知っていてもプレイヤー 2 が弱支配戦略 A_2 を選ばないようなプレイヤーでは B_1 が良いとは決定できない．つまり，プレイヤー 1 が B_1 を選ぶためには，プレイヤー 2 の利得を知っていて，なおかつプレイヤー 2 が弱支配戦略を選ぶようなプレイヤーであることを知っているということが必要になるのである．

支配可解なゲームにおいては，一般的にはレベルが高くなるほど，実際に人間がそのゲームの解をプレイするかどうかは疑わしくなり，実験でもそれが確かめられている．支配可解なゲームの解が現実に使えるためには，レベルが低いことが必要となる．

8. ナッシュ均衡

すべてのゲームが支配可解ではなく，その考え方で解けるわけではない．表 4 のゲーム 2 は両性の戦いと呼ばれるゲームで，どちらのプレイヤーにも支配される戦略はなく，支配可解ではない．このようなゲームでは何をゲームの解として考えるのであろうか？　ゲームを解くための 2 つ目の考え方は，プレイヤーは最適反応戦略を選ぶというものである．プレイヤー i 以外の戦略 $s_{-i} \in S_{-i}$ が与えられたもとで，プレイヤー i の戦略 t_i が，

$$u_i(t_i, s_{-i}) = \max_{r_i \in S_i} u_i(r_i, s_{-i})$$

を満たすとき，戦略 t_i は s_{-i} に対するプレイヤー i の最適反応戦略であると言う．

ゲーム 2 において，プレイヤー 2 の戦略 A_2 に対するプレイヤー 1 の最適反応戦略は A_1 であり，プレイヤー 2 の戦略 B_2 に対するプレイヤー 1 の最適反応戦略は B_1 である．最適反応戦略を選ぶという考え方だけでは，プレイヤー 2 がどの戦略を選ぶかによって最適反応戦略が異なるためにプレイヤー 1 の選択は決まらない．しかし，もしすべてのプレイヤーがある 1 つの戦略の組 $s^* \in S$ をゲームの結果として共通に予測するならば，それは全員が最適反応戦略を選び合う戦略の組であるはずだ．そうでなければ少なくとも 1 人のプレイヤーは最適反応戦略を選んでいないので，そのプレイヤーはその予測のもとでは，より高い利得を得る最適反応戦略に戦略を変えるだろう．そうすると，もはやその予測は実現しないはずである．

表 5　ゲーム 3 の利得行列：（表，表）のナッシュ均衡が選ばれやすい

1 \ 2	表	裏
表	(1,1)	(0,0)
裏	(0,0)	(1,1)

このような考え方をナッシュ均衡と呼ぶ．戦略の組 $s^* \in S$ がナッシュ均衡であるとは，すべてのプレイヤー i に対して，s_i^* が s_{-i}^* の最適反応戦略になっていることを言う．

ナッシュ均衡が解であるとしても問題は残る．ゲーム 2 において (A_1, A_2) と (B_1, B_2) はともにナッシュ均衡である．このようにナッシュ均衡は複数存在することがあり，その中のどのナッシュ均衡をプレイヤー全員が共通に結果として予測するかが明らかではないとナッシュ均衡が実現するかどうかが怪しくなる．実際に人間にゲーム 2 をプレイさせて実験すると，ナッシュ均衡が選ばれる確率はそう高くはなく，(A_1, B_2) や (B_1, A_2) になってしまう場合も多い．これに対し，相手が何を選ぶかがうまく予測できるような社会的慣習や合意があればナッシュ均衡が実現しやすくなり，そのような点はフォーカルポイントと呼ばれる．例えば，表 5 のゲーム 3 は（表，表）と（裏，裏）がナッシュ均衡であるが，実験すると 90%が「表」を選び，10%しか「裏」を選択しないことが知られている [4]．

ゲームが支配可解であれば，それによって選ばれた戦略の組はナッシュ均衡である（例えばゲーム 1 の解 (B_1, A_1) はナッシュ均衡）．したがって戦略の支配を考えなくてもナッシュ均衡の考え方だけでゲームの解を求めることができる．一昔前のゲーム理論では「ナッシュ均衡がゲームの解である」ということだけが重視され，戦略の支配という概念は軽視されていた．しかし支配可解のゲームのナッシュ均衡は，どのような推論によってそのナッシュ均衡に到達できるかが明確であり，実現する可能性が大きいと考えられる．戦略の支配の概念だけですべてのゲームの解を選ぶことはできないが，それが可能ならば強い意味での解となる．

戦略の支配とナッシュ均衡の関係をもう 1 つ述べておこう．表 6 のゲーム 4 では (A_1, A_2)，(B_1, B_2)，(C_1, C_2) はすべてナッシュ均衡であるが，プレイヤー 1

表6　ゲーム4の利得行列：ナッシュ均衡の精緻化

1＼2	A_2	B_2	C_2
A_1	(3,3)	(0,0)	(0,0)
B_1	(3,0)	(1,2)	(0,0)
C_1	(0,0)	(0,0)	(1,2)

表7　ゲーム5の利得行列：ナッシュ均衡がないゲーム？

1＼2	H	T
H	(10,−10)	(−1,1)
T	(−1,1)	(1,−1)

の戦略 A_1 は戦略 B_1 に弱支配されている．「支配された戦略は選ばない」という考え方に基づけば (A_1, A_2) は解ではない．ゲーム4は支配可解ではないが，戦略の支配の考え方はこのようにナッシュ均衡を絞り込む場合にも使うことができる．これを均衡の精緻化という．

まとめると，すべてのゲームにおいて，ナッシュ均衡は解であるが，その中でも，実現しやすいナッシュ均衡と実現しにくいナッシュ均衡があるということである．弱支配戦略や低いレベルで支配可解であるゲームのナッシュ均衡は実現しやすく，また支配された戦略を用いたナッシュ均衡よりは，支配されていない戦略を用いたナッシュ均衡のほうが実現しやすい．またフォーカルポイントによって選ばれやすいナッシュ均衡もあるだろう．

どのようなナッシュ均衡が実現の可能性が高いのかという問題は，非協力ゲームに残された課題の1つであると言え，ゲーム理論を現実に適用するにはそれを考慮することが重要である．

9.　混合戦略とナッシュ均衡の存在

表7のゲーム5は，各プレイヤーが H または T を選び，両方が同じ戦略を選ぶとプレイヤー1の勝ち，異なる戦略を選ぶとプレイヤー2が勝つ．勝ったほうは負けたほうに1万円払うが，(H, H) のときだけプレイヤー2はプレイヤー1に10万円を払うというゲームである．皆さんがプレイヤー1ならば，何を選ぶだろう？

ゲーム5は，これまでの議論に従うとナッシュ均衡が存在しない．しかしこのようなゲームも，プレイヤーが確率で戦略を選ぶ混合戦略という概念を用いれば，ナッシュ均衡の存在を示すことができる．以下，それについて説明しよう．

プレイヤー i の混合戦略とは S_i 上の確率分布の1つであり，プレイヤー i の混合戦略の集合は

$$P_i = \{p_i : S_i \to \mathbb{R} \mid \quad \textstyle\sum_{s_i \in S_i} p_i(s_i) = 1, \quad p_i(s_i) \geq 0, \forall s_i \in S_i\}$$

によって定義される．ここで $P = P_1 \times \cdots \times P_n$, $P_{-i} = P_1 \times \cdots P_{i-1} \times P_{i+1} \cdots \times P_n$ とする．各プレイヤーが混合戦略を用いたときのプレイヤー i の利得関数 $U_i : P \to \mathbb{R}$ は，その利得の期待値であり，u_i を用いて以下のように定義する．

$$U_i(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{(s_1, \ldots, s_n) \in S} (\Pi_{j=1}^n p_j(s_j))\, u_i(s_1, \ldots, s_n).$$

プレイヤー i 以外の混合戦略 $p_{-i} \in P_{-i}$ が与えられたときに，プレイヤー i の混合戦略 $t_i \in P_i$ が，

$$U_i(t_i, p_{-i}) = \max_{r_i \in P_i} U_i(r_i, p_{-i})$$

を満たすならば，混合戦略 $t_i \in P_i$ は p_{-i} に対する最適反応戦略であると言う．戦略の組 $(p_1^*, \ldots, p_n^*) \in P$ がナッシュ均衡であるとは，すべてのプレイヤー i に対して，p_i^* が p_{-i}^* の最適反応戦略になっていることを言う．

ナッシュは角谷の不動点定理を用いて，すべての n 人ゲームにおいて混合戦略まで考慮すればナッシュ均衡が必ず存在することを証明した．混合戦略は，すべてのゲームにナッシュ均衡が存在することを示すために，理論的観点からは重要な概念と認識されていたが，実用的観点からは時には非現実的であるとされた．ビジネススクールの講義で「ゲーム5のような場面では経営者はサイコロを振れ」と言っても，学生たちはあまり感心しなかったのである．

しかしながら近年は警備問題への混合戦略の応用が進みつつある．テロリストに警備計画を読まれないために，警備員の配置を乱数化することは感覚的にも納得できるものであろう．他にもスポーツの戦略など，混合戦略が妥当な解釈を与える場面が現れており，混合戦略の現実的な応用は，長い歴史を経て，いま進みつつあると言える．

さてゲーム5では，プレイヤー1は H をどのような確率で選ぶことがナッシュ均衡になるのであろうか．10万円を獲得するほうが期待値が高いので，H を用いる確率のほうが高くなるかと思えばそうではない．ナッシュ均衡では，プレイヤー1は H を2/13，T を

11/13 で選ぶ．プレイヤー 1 が H を出す確率を高くすれば，プレイヤー 2 も T を出す確率が高くなるため 10 万円を得る可能性が低くなり，しかも勝つ確率が小さくなる．ナッシュ均衡では，プレイヤー 1 も 2 も高い確率で T を選び，プレイヤー 1 が高い確率で 1 万円を得るという結果になる．

10. ミニマックス定理

任意の戦略の組 $s \in S$ が $u_1(s) + u_2(s) = 0$ であるような 2 人ゲームを 2 人ゼロ和ゲームと言う．ゲーム理論はフォン・ノイマンがこの 2 人ゼロ和ゲームを考察し，ミニマックス定理と呼ばれる定理を証明したことが，その出発点となっている．2 人ゼロ和ゲームでは，プレイヤー 1 の利得が与えられればプレイヤー 2 の利得は $u_1(s) = -u_2(s)$，期待利得は $U_1(p) = -U_2(p)$ とわかるので，以下では添字を取り $u(s) = u_1(s)$，$U(p) = U_1(p)$ とする．

ここで各プレイヤーは，自分の混合戦略に対して相手が自分にとって最小の利得となる混合戦略を選んでくると悲観的に想定し，その中で利得が最大になる戦略を選ぶとしよう．これは先に出てきたマキシミニ基準である．プレイヤー 1 は自分の混合戦略 p_1 に対して，最も低い利得を与える混合戦略 $m(p_1)$ をプレイヤー 2 が選ぶと想定する．すなわち $m(p_1)$ は

$$U(p_1, m(p_1)) = \min_{p_2 \in P_2} U(p_1, p_2)$$

を満たす混合戦略である．このような想定のもとで，プレイヤー 1 が利得をもっとも高くする戦略 p_1^* をプレイヤー 1 のマキシミニ戦略という．すなわち

$$U(p_1^*, m(p_1^*)) = \max_{p_1 \in P_1} U(p_1, m(p_1))$$

を満たす戦略 p_1^* をマキシミニ戦略と言う．プレイヤー 2 も同様に考えるが $u_2(s) = -u_1(s)$ であることから，プレイヤー 2 の利得が高く（低く）なることはプレイヤー 1 の利得が低く（高く）なることと同値である．そこで $M(p_2)$ を

$$U(M(p_2), p_2) = \max_{p_1 \in P_1} U(p_1, p_2)$$

を満たす混合戦略とすると，プレイヤー 2 は

$$U(M(p_2^*), p_2^*) = \min_{p_2 \in P_2} U(M(p_2), p_2)$$

となる戦略 p_2^* を選ぶ．p_2^* をプレイヤー 2 のミニマックス戦略と呼ぶ．

定義より

$$U(p_1^*, m(p_1^*)) \leq U(p_1^*, p_2^*) \leq U(M(p_2^*), p_2^*) \quad (1)$$

であることがわかるが，フォン・ノイマンはすべての 2 人ゼロ和ゲームに対して

$$U(p_1^*, m(p_1^*)) = U(M(p_2^*), p_2^*)$$

が成立することを証明した．これがミニマックス定理である．ミニマックス定理と式 (1) より

$$U(p_1^*, m(p_1^*)) = U(p_1^*, p_2^*) = U(M(p_2^*), p_2^*)$$

であり，これを変形すると

$$\begin{aligned} U_1(p_1^*, p_2^*) &= U(M(p_2^*), p_2^*) = \max_{p_1 \in P_1} U_1(p_1, p_2^*), \\ U_2(p_1^*, p_2^*) &= -U(p_1^*, m(p_1^*)) = -\min_{p_2 \in P_2} U(p_1^*, p_2) \\ &= \max_{p_2 \in P_2} U_2(p_1^*, p_2) \end{aligned}$$

であることがわかる．このことは (p_1^*, p_2^*) がナッシュ均衡であることを示している．

昔，ゲーム理論を学んだ方は「ゲーム理論の解はミニマックス戦略である」と習った方も多いのではないだろうか．2 人ゼロ和ゲームでは，相手が常に自分にとって最悪の戦略を選ぶと考えたマキシミニ基準で戦略を選ぶことがナッシュ均衡になっている．しかもこのナッシュ均衡は，マキシミニ基準という個人の意思決定からたどり着くことができ，プレイヤーがどのように予測するかが明らかである．これが「ゲーム理論の解はミニマックス戦略である」と言われた理由である．

しかし非ゼロ和ゲームではゲーム 1 で見たようにマキシミニ基準で選ばれる解は，もはやナッシュ均衡ではない．プレイヤー 1 は A_1 を選ぶことがマキシミニ戦略であるが，プレイヤー 2 が A_2 を選ぶと予測するならば（これはプレイヤー 2 のマキシミニ戦略になっている），プレイヤー 1 は B_1 を選ぶほうが利得が高くなる．現在の非ゼロ和ゲームを中心とするゲーム理論では，マキシミニ戦略の組は解とは考えないのである．

謝辞　本稿の執筆にあたり，岩崎敦先生，河重隆一郎氏，岸本信先生，福田恵美子先生，大和毅彦先生に有益なコメントをいただきました．ここに感謝いたします．

参考文献

[1] 渡辺隆裕 “ゲーム理論入門／「ゲーム理論」は数学か？,” 数学セミナー，2014 年 10 月号 （636 号）．
[2] 渡辺隆裕，『ゼミナールゲーム理論入門』，日本経済新聞社，2008.
[3] E. Tardos and V. Vazirani, “Basic solution concepts and computation issues,” *Algorithmic Game Theory*, N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, et al. (eds.), Cambridge University Press, 2007.
[4] 大和毅彦，“ゲームと実験,”『OR 辞典 2000』，日本オペレーションズ・リサーチ学会編，2000.