施設配置の数理
—種々の最適化視点から見つめる都市—

本間　裕大

都市には駅・市役所・病院といったさまざまな種類の“施設”が存在する．人々は必ず移動を伴ってこれらの施設を利用するため，その“配置”が利便性を決める重要な一要因となる．そこで本稿では，都市における“施設配置問題”を OR 的視点から分析し，数学的作法の基礎や，論理的な結論から導かれる真意（こころ）について解説する．施設を配置すれば，結果として「得をする人と損をする人」が生じ，全員を納得させることは決して容易でない．よって，その“解”をいかに社会へ還元するかは，むしろ政治経済的なテーマと言える．ぜひ OR の，幅広い社会適用性の一端を味わってほしい．

キーワード：施設配置問題，ミニサム型配置，ミニマックス型配置，パレート最適

1.　はじめに

都市にはさまざまな種類の“施設”が存在する．たとえば，駅・ショッピングモール・市役所・病院・公園などである．これら数多くの施設が都市に存在することによって，都市機能を形作っているわけであるが，そのとき，各施設がどこにあるか，すなわち“配置”が利便性を決める重要な一要因となることは，容易に想像できるのではないだろうか．したがって，一般社会の中で「施設をどこに配置するか？」という問題は，古今東西を問わず常に生じ，また，そうした問題はオペレーションズ・リサーチ (OR) の重要なテーマの一つとなる．ここでは，都市における“施設配置問題”に焦点を当て，数学的作法の基礎や，論理的な結論から導かれる真意（こころ）について解説したい．

私たちの日常を振り返ると明らかなように，都市はある地点(たとえば自宅)からある地点(たとえば学校)への移動が繰り返されることによって成立している．この移動に要する距離は,上述した施設の配置によってさまざまに変化し，結果として「得をする人と損をする人」が必ず生じる．このような住民同士の利害のせめぎ合いや，都市全体での利益をさまざまに考慮すると，全員を納得させる施設の配置を求めることは決して容易でない．本記事では,主に数学的な思考に基づいて議論を展開するが,その“解”をいかに社会へ還元するかは,むしろ政治経済的なテーマと言えよう.ぜひ OR の幅広い社会適用性の一端を感じ取っていただきたい．

ほんま　ゆうだい
東京大学生産技術研究所
〒 153–8505 東京都目黒区駒場 4–6–1

2.　ミニサム型施設配置問題

2.1　OR の問題として

次の問題を考えよう．図 1 のような，1 次元の都市に n 軒の家がある状況を考える（図 1 では $n = 5$）．この n 軒のために，各家庭が同頻度で利用するような施設（例：公民館・美術館・郵便局など）を建設したい．さて，どのような考え方にもとづいて建設位置を決めるべきだろうか．

一見単純なこの問題からも，社会を数学で分析する OR の本質は，十分に学ぶことができる．まずは OR に必須の“モデル”という言葉を紹介したい．ここでのモデルとは，プラモデル（模型）のそれと同じ概念であり,「余分な情報を排除し本質的なものだけを残したもの」を意味している．上の問題では，1 次元という仮定がモデル化にあたる．本来ならば，われわれは平面（2 次元）の上に住んでいるのだから，1 次元では本質が失われていると思われるかもしれない．しかし，たとえば，幹線道路や鉄道などの沿線に住民が分布している場合は，その沿線（1 次元）上という本質的部分だけを抜き出すことによって，より明解な議論ができる利点がある．

“目的関数”も OR の重要な概念である．社会に対して何らかの提案をするのだから，多少おこがましかろうが，最もよい（最適な）プランを提示したい．OR≒

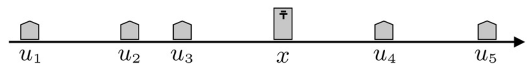

図 1　都市モデル（$n = 5$ の例）

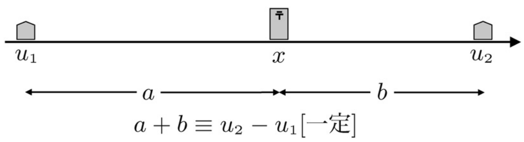

図 2　$n = 2$ のときのミニサム型配置の図解

数学であるので,「社会が何を目的としているのか」を考慮したうえで，それを数式で示した目的関数を定義しなければならない．本稿ならば,“できるだけ近く”こそが目的であり，それを表現しうる目的関数の一例としては，各家から施設までの距離の総和などが考えられる．仮にすべての家庭が自動車で移動したとすると，都市全体でのガソリンの総消費量は距離の総和に比例するので，それを最小化することが社会的にも好ましい.「目的関数の最小化（または最大化)」は OR の定石手法である．

2.2　定式化

では，早速 OR 手法を用いて，最初に示した問題を解いてみよう．図 1 のように 1 次元都市を x 軸で表現する．そして，どこかに原点があるものとして，この軸上に住む n 軒の家の位置を左から順に

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \tag{1}$$

とし，また，建設する施設の位置は x とする．このとき，各家から施設までの距離の総和 $T(x)$ は,

$$T(x) = |x - u_1| + |x - u_2| + \cdots + |x - u_n| \tag{2}$$

である（x と u の大小関係による場合分けを割愛すべく絶対値を用いた)．この $T(x)$ を最小にする施設の位置 x^* を求める問題は，距離の総和（summation → サム）を最小化（minimize → ミニ）していることから，ミニサム型施設配置問題と言う．言うなれば，都市全体での移動エネルギー最小化問題である．

2.3　ミニサム型問題の解

$n = 2$ の場合，ミニサム型問題は少し直観に反した解が得られる：

補題　2 軒の家 u_1 と u_2 からの距離の総和を最小にする施設の位置は $u_1 \leq x \leq u_2$ を満たす任意の点である（つまり，あいだならばどこでもよい！)．

上記が成り立つことは，図 2 から一目瞭然である．すなわち，施設が u_1 と u_2 の間にあるという条件下では，距離の総和 $a + b \equiv u_2 - u_1$[一定] であり，施設の位置に依存しない．

そして，この補題を用いると任意の n についてミニサム型問題の解を導くことができる：

1. n が奇数のとき ⇒ 最適位置 x^* は左から $n/2+1/2$ 番目（つまり，ちょうど真ん中）の家の位置 $x^* = u_{n/2+1/2}$ で与えられる．
2. n が偶数のとき ⇒ 最適位置 x^* は真ん中 2 軒の位置 $u_{n/2} \leq x^* \leq u_{n/2+1}$ のあいだの任意の点である．

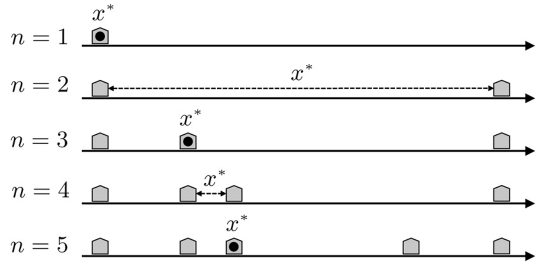

図 3　$n = 1, 2, \ldots, 5$ のときのミニサム型配置

図 3 に，$n = 1, 2, \ldots, 5$ の場合の最適解を示す．

ミニサム型問題の解は，次のように考えることで理解できる．$n = 3$ の場合を考えよう．ここで u_1 と u_3，すなわち両端の 2 軒からのみの距離の総和を考えると，補題より（$u_1 \leq x \leq u_3$ の条件付で）一定なので，目的関数 $T(x)$ の増減に影響を与えない（無視できる)．すると考慮すべきは u_2 からの距離のみとなり，これを最小化してくれる施設位置は明らかに $x^* = u_2$ である．$n = 4$ の場合も同様で，両端の 2 軒 u_1, u_4 からの距離の総和は無視できることになり，問題は $n = 2$，u_2 と u_3 のミニサム型問題に帰着される ($u_2 \leq x^* \leq u_3$)．以降，同じ手順を繰り返していけば，つまるところ真ん中の 1 軒か（奇数)，2 軒か（偶数）のみの問題に行き着く．上述の一般解は，これを数学的に記述したに過ぎない．

2.4　ミニサム型配置の問題点

ミニサム型問題の解を振り返って，奇妙な点に気づかないだろうか．議論を通して私たちは（左からの）各家の順番，つまり“相対的な位置関係”には注意を払ったが，$u_1, \ldots, u_n$ が具体的にどのような値なのか，言わば“絶対的な位置関係”には無頓着であった．この事実は，ときに好ましくない事例を引き起こす．

図 4 は，そのような問題点を端的に示す一例である．5 軒の家は左側に固まっているが，右端に 1 軒だけが離れてしまっている．ミニサム型配置に基づけば，$n = 6$ より u_3 と u_4 のあいだの任意の点が最適解であるが，ここではちょうど中間地点に施設を建設したとする．ここで「どれだけの距離を移動する家が何軒あるか」を

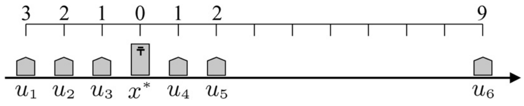

図 4　ミニサム型配置における問題点

表 1　図 4（ミニサム型）における家から施設までの距離

距離	1	2	3	4	5	6	7	8	9
軒数	2	2	1	-	-	-	-	-	1

距離の総和：18，距離の最大値：9

集計してみたのが表 1 である．ほとんどの家（左側の 5 軒）にとっては施設までの距離が少なく好ましいだろうが，1 軒だけ（右端）多大な距離を移動しなければならないことがおわかりだろう．

これは極端な例であるが，えてしてミニサム型配置では，社会全体での最適化のために犠牲となる住民がでてくる．“公平さ”のようなものを意識するならば，別の配置方法もあってしかるべきだろう．そのような一手法として，次節では，ミニマックス型施設配置問題を紹介する．

3.　ミニマックス型施設配置問題

3.1　定式化

本節では，可能な限り“公平な”施設配置問題を取り上げたい．一言で公平と言ってもその尺度はさまざまなものが考えられるが，着目すべきはやはり家から施設までの距離である．そこで本節では，誰かだけ移動距離が長くなり過ぎることがなくなるように定式化してみよう．

前節と同様の 1 次元都市を考える．ただし，その目的関数を

$$L(x) = \max\{|x - u_i| \ : \ i = 1, 2, \ldots, n\} \qquad (3)$$

で与える．$L(x)$ はつまるところ“最も遠い”家から施設までの移動距離である．この $L(x)$ を最小化するような施設の位置 x^{**} を求める問題は，距離の最大値（maximum value → マックス）を最小化（minimize → ミニ）していることから，ミニマックス型施設配置問題と呼ばれる．言うなれば，社会弱者救済型問題である．

3.2　ミニマックス型問題の解

ミニマックス型問題の解は次のとおりである：

ミニマックス型問題の最適位置 x^{**} は左端 u_1 と右端 u_n の家の位置の中点 $x^{**} = (u_1 + u_n)/2$ で与えられる．

$u_1 \le x \le u_n$ に建設するのであれば，距離が最大となるのは左端か右端の家であることは明らかなので，その両端の 2 軒からの距離が等しくなる施設位置を決めることが，ひいてはミニマックス型配置を実現することになる（図 5）．ミニサム型配置よりもミニマックス型配置のほうが好ましい施設の例としては，消防署や救急病院などが挙げられよう．

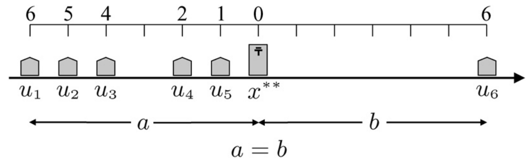

図 5　ミニマックス型配置の解

表 2　図 5（ミニマックス型）における家から施設までの距離

距離	1	2	3	4	5	6	7	8	9
軒数	1	1	-	1	1	2	-	-	-

距離の総和：24，距離の最大値：6

3.3　ミニマックス型配置の問題点

以上のように議論を進めると，ミニマックス型配置のほうがミニサム型配置よりよいような錯覚を覚えるかもしれない．しかし，話はそう単純でもない．先ほどの具体例でミニマックス型配置を分析してみると，そのことがよくわかる．

図 5 は，図 4 の 6 軒の家に対するミニマックス型配置を示したものであり，このときの家から施設までの距離は表 2 のとおりである．距離の最大値こそ 9→6 へと減少したものの，その代償として多くの家庭が（少しずつ）不利益を被っていることが見てとれる．ミニマックス型配置も，決して万能ではないのである．

4.　パレート最適な施設位置

4.1　パレート最適の考え方

残念ながらミニサム型・ミニマックス型のどちらの配置にも，一長一短があることが明らかになってしまった．これはある意味当然であり，どちらかの指標（距離の総和，または，距離の最大値）に特化して最適化を図れば，もう片方に支障をきたすのは避けられない．さりとて単純に「どちらか選んでください」と丸投げしてよいはずもない．どちらの指標も考慮した提案はできないのだろうか．そのための考え方として，最後に“パレート最適”というアイディアを紹介しよう（パ

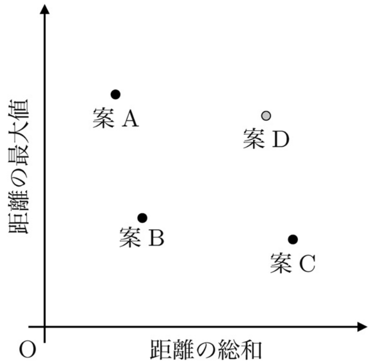

図 6　パレート最適の図解

レート Pareto はイタリアの経済学者の名前である）．

とある都市で，四つの施設配置案が提案されたとしよう．ミニサム・ミニマックスは有用な概念であるので，それぞれの配置案について“距離の総和”と“距離の最大値”を計算しておくことには意味がある．その結果を直交座標系に示したものが図 6 である．どちらの指標も小さいほど好ましいので，原点に近いほどよりよい案ということになる．

この例では案 D をまず候補から外すべきであることに気づくだろうか．理由は明確であり，距離の総和と距離の最大値の“どちらも”より優れている案 B が存在するからである（案 B のほうがよいことずくめ！）．一方で，案 A，B，C には，そのような凌駕される代替案が存在しない．それぞれに特長があり，両方の基準で最適ではないが，両方の基準とも劣っていることもないのである．すなわち，（この例においては）その案より左下に代替案がない，というものをパレート最適な案と呼ぶ（案 A，B，C）．

4.2　1 次元都市におけるパレート最適案

では具体的に 1 次元都市で，パレート最適な案を導出してみよう．このためには配置する施設の位置 x を“媒介変数”として[1]，点 $(T(x), L(x))$ の軌跡を描けばよい．図 4・5 の例でこれを行った結果を図 7 に示す．

上述のとおり，本例では左下に代替案がない部分がパレート最適な案（の集合）となるのだから，太線で示した部分集合がそれにあたることは明らかである．そしてこのパレート最適な解の集合は，（理由は割愛するが）ミニサム型配置（の一部分）とミニマックス型配置を結んだ線分領域に対応する．ミニサム型配置とミニマックス型配置を究極案として，その折衷案を議論

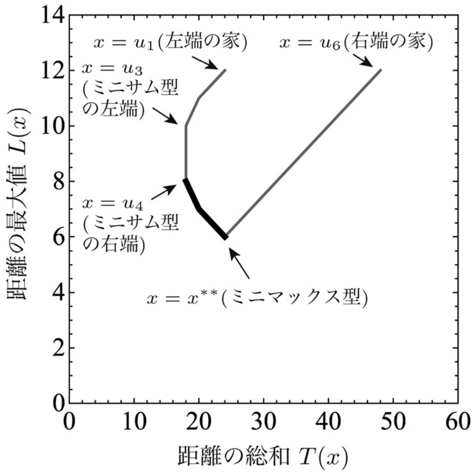

図 7　1 次元都市におけるパレート最適集合の例

することは OR 的にも合理的なのである．

5.　おわりに

ミニサム型，ミニマックス型，さらにはパレート最適案と議論を展開し，施設配置の数理分析について概説した．もちろんこれらはある種の理想論であり，最終的には当該施設を取り巻く利害関係や社会背景，また土地利用の制約など，多種多様な要因が最終的な意思決定に複雑に影響を及ぼす．OR は，あくまでも意思決定に際する参考情報を与えるに過ぎない．

それでもなお，論理的・数理的な知見は，感情論やエゴイズムの支配から抜け出し，より建設的な議論を行う土台となろう．OR は社会を読み解く極めて有益な道具（ツール）なのである．

さらに学ぶために

読者の中には，2 次元平面での施設配置に興味をもった人もいるだろう．最も容易に入手できる解説文献として [1] を挙げておく．また，施設配置問題のように都市のさまざまな現象を数理解析する系譜として，“都市の OR”がある．入門書として [2] も薦めたい．

参考文献

[1] 栗田治，“施設配置モデル—社会のための数学の例—，”オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，**41**, pp. 174–177, 1995.
[2] 栗田治，『都市モデル読本』，共立出版，2004.

[1] 媒介変数は数学 III で学ぶ．ここでは $u_1 \le x \le u_n$ の範囲で徐々に x を変化させ，という意味である．