

# ハミルトン閉路について

小関 健太

グラフのハミルトン閉路は、幅広い応用が知られていることと理論的に興味深い構造であることから研究が盛んであるが、その一方で、存在性の判定問題がNP-完全に属する難しい問題でもある。そこで、特にハミルトン閉路の非存在を示すためにタフネスという指標を用いることが提案され、実際にいくつかのグラフの族では有用なものとなっている。本稿では、このタフネスの有用性とハミルトン閉路の応用例を紹介する。

キーワード：ハミルトン閉路、タフネス、ナイトツアー、区間グラフ、平面グラフ

## 1. はじめに

本題に入る前に、次のパズルを出題しておく。解答は次ページの3.1節に載せるので、興味のある方はそれまでに考えてほしい。

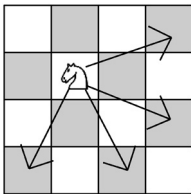


図1 ナイトの動き方

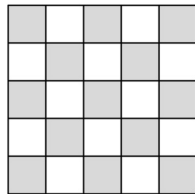


図2 5×5のチェス盤

ナイトはチェスの駒の一種であり、図1のように1×2の長方形の対角線上に位置するマスに移動できる。「あるマスにいるナイトが、すべてのマスをちょうど一度ずつ通り始めのマスに戻る」ような経路をナイトツアーと呼ぶ。8×8の(通常)のチェス盤や5×6のチェス盤にはナイトツアーが存在するが、ここで考えたい問題は存在しない場合の「理由」である。

### 問題 1.

- (1) 5×5のチェス盤(図2)にはナイトツアーが存在しない。この理由を簡潔に説明せよ。
- (2) 4×4のチェス盤にもナイトツアーが存在しない。この理由を簡潔に説明せよ。

おぜき けんた  
 国立情報学研究所 ビッグデータ数理国際研究センター  
 〒101-8430 東京都千代田区一ツ橋 2-1-2  
 JST, ERATO, 河原林巨大グラフプロジェクト  
 ozeki@nii.ac.jp

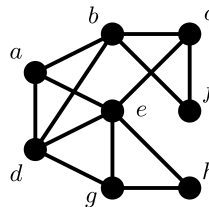


図3 グラフ G

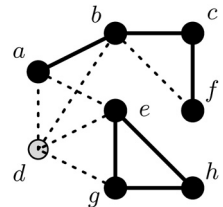


図4 道 a, b, c, f と閉路 e, g, h, e

## 2. ハミルトン閉路

ある集合(頂点集合)と、その二元部分集合の族(辺集合)のペアをグラフといい、辺  $ab$  は<sup>1</sup>頂点  $a$  と  $b$  を結ぶという。グラフ  $G$  の頂点集合を  $V(G)$ 、辺集合を  $E(G)$  と表す。

グラフの定義は組合せ的なものであるが、同時に図示されたものを思い浮かべると考えやすい。たとえば、

$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\},$$

$$E(G) = \{ab, ad, ae, bc, bd, bf, ce, cf, de, dg, eg, eh, gh\},$$

であるグラフ  $G$  は、●でグラフの頂点を、それらを結ぶ直線で辺をそれぞれ表すことで、図3のように図示される。なお、辺  $ae$  と  $bd$  などの辺の交差が存在しているが、これは図の描き方の問題で交点は頂点ではないことに注意されたい。

グラフの頂点の列で、同じ頂点を2回使わず、かつ連続するどの2頂点も辺で結ばれているものを道と呼ぶ。図3のグラフ  $G$  では、 $a, b, c, f$  や  $d, g$  などは道であるが、 $a, b, d, a, e$  は頂点  $a$  を2回使うためではない。道の始めと終わりの頂点をそれぞれ始点と終点、または両方合わせて端点と呼ぶ。図4の道  $a, b, c, f$  で

<sup>1</sup> 辺は二元集合なので、本来ならば  $\{a, b\}$  のように書くべきだが、ここでは省略して  $ab$  と書いている。以下、本稿での辺は常にそのように記すことにする。

は始点が  $a$  で終点が  $f$  である。

グラフ  $G$  における 3 頂点以上からなる道  $P$  とその始点  $x$ , 終点  $y$  に対し, 辺  $xy$  が  $G$  に存在するとき,  $P$  の最後に頂点  $x$  を加えてできる頂点列を閉路と呼ぶ。図 3 のグラフでは  $a, b, c, e, a$  や  $e, g, h, e$  などが閉路である (閉路  $e, g, h, e$  は図 4 を参照されたい)。

さらに, 図 5 の道  $d, g, h, e, a, b, c, f$  のように, 全頂点を通る道をそのグラフのハミルトン道, 図 6 の閉路  $a, b, f, c, e, h, g, d, a$  のように, 全頂点を通る閉路をハミルトン閉路と呼ぶ。

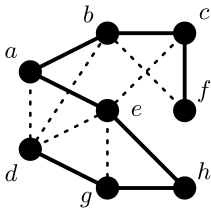


図 5  $G$  のハミルトン道

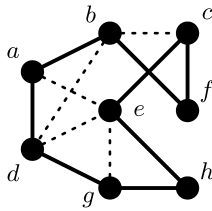


図 6  $G$  のハミルトン閉路

ハミルトン閉路はさまざまな場面に現れる有用なものであり, そのいくつかを紹介しておく。

- ・巡回セールスマン問題：  
全頂点对の集合を辺集合とするグラフを完全グラフと呼ぶ。各辺にコストとして実数が与えられている完全グラフにおいて, 通過する辺のコストの合計が最小となるハミルトン閉路を見つける問題が巡回セールスマン問題である。詳しくは本特集の小田氏の記事を参照してほしい。
- ・グラフの本型埋め込み：  
本特集の野口氏の記事に現れる本型埋め込みも, ハミルトン閉路から構成できる。本型埋め込みは VLSI (Very Large Scale Integration) の設計やデータ圧縮などの応用があることが知られている。6.2 節では, ハミルトン閉路を用いた本型埋め込みの方法を述べる。
- ・地図の塗り分け問題と四色定理：  
四色定理として有名な地図の塗り分け問題だが, ハミルトン閉路を利用した塗り分けの手法が, 1800 年代にはすでに知られていた。この点は 6.3 節で述べる。

### 3. タフネス条件

前節のような応用のためにも, 「与えられたグラフがハミルトン閉路をもつかどうか」を効率的に判定したい。しかしながらこれは NP-完全に属する問題であり,

簡単ではなく, 特にハミルトン閉路をもたない場合にその“証拠”を提供することが難しい<sup>2</sup>。本稿では, (完全な証拠とはならないが) さまざまな場面で役に立つタフネス条件を考える。そのアイデアを, 問題 1 の解答例から紹介したい。

#### 3.1 問題 1 の解答例

(1) の解答例: 次の事実から説明できる。

「ナイトは白マスと黒マスを交互に移動する」

5×5 のチェス盤には, 白マスが 12 マス, 黒マスが 13 マス存在する (またはその逆となる) ため, すべての頂点をめぐり出発点に戻ることは不可能である。□

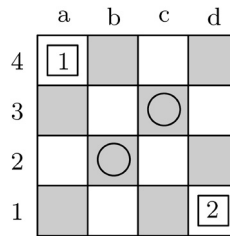


図 7 マス b2 と c3

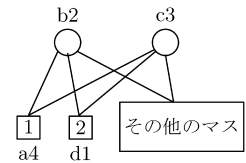


図 8 図 7 のイメージ

(2) の解答例: 図 7 にある  $\circ$  の 2 マス b2 と c3 に注目する<sup>3</sup>。ナイトが  $\boxed{1}$  a4 にいる場合は  $\circ$  のどちらかを経由しない限りほかのマスへは移動できない。これは  $\boxed{2}$  d1 でも同様である。すなわち図 8 のように,  $\circ$  の 2 マス以外は,  $\boxed{1}$  a4 のマス,  $\boxed{2}$  d1 のマス, および  $\boxed{3}$  その他のマス, と三つのグループへと分割され, 一つのグループからはほかのグループへの移動には  $\circ$  のどちらかのマスを必ず使う。しかしながら  $\circ$  は 2 マスしか存在しないため, 三つのグループをすべて巡り始めのマスに戻ることは不可能である。□

これらの解答例が, ハミルトン閉路が存在しない場合の“証拠”を示唆している。次節でこれを正式に定義する。

#### 3.2 タフネスの定義とハミルトン閉路

グラフ  $G$  の頂点集合に“ある道の両端点になる”という同値関係を与えたとき<sup>4</sup>, この関係に対しての各同値類を  $G$  の連結成分と言ひ<sup>5</sup>, グラフ  $G$  の連結成分の

<sup>2</sup> 計算量理論の言葉では, 「ハミルトン閉路問題は co-NP であるか?」という問題に対応する。これは多くの研究者が NO であると信じている。

<sup>3</sup> チェスの表記に従い, チェス盤の行を数字で, 列をアルファベットで記し, その組合せで各マスを表す。

<sup>4</sup> 本当に同値関係となることは, 各自で確かめてほしい。

<sup>5</sup> 直感的に“固まりとなっている”という意味での連結と思って構わない。

数を  $\omega(G)$  と書く. 正の実数  $k$  に対し, 次の性質を満たすグラフ  $G$  を  $k$ -タフであると言う: 任意の頂点部分集合  $S$  に対し,  $G$  から  $S$  の頂点を取り除いてできるグラフ  $G - S$  が<sup>6</sup>

$$k \cdot \omega(G - S) \leq |S|$$

を満たす. すなわち,  $k$ -タフであるグラフは頂点を取り除くことで連結成分数が大きく増えない. これは  $k$  の値が大きくなるほどその傾向が強くなり, ある意味でのグラフの連結性が高いと言える.

これに対し, 次の重要な性質が成り立つ.

**命題 1.** ハミルトン閉路をもつグラフは1-タフである.

**証明.** 対偶, すなわち, 「グラフ  $G$  のある頂点部分集合  $S$  で  $\omega(G - S) > |S|$  が成り立つならば,  $G$  はハミルトン閉路をもたない」を示せばよい.

そのような頂点部分集合  $S$  が存在したと仮定する. このとき,  $G - S$  の一つの連結成分の頂点を始点とする道を考えて, この道が  $G - S$  のほかの連結成分へたどり着くためには  $S$  の頂点を通る必要がある. したがって,  $\omega(G - S)$  個の連結成分をすべて回って始点を含む連結成分に戻るためには同じ数の  $S$  の頂点が必要となるが,  $\omega(G - S) > |S|$  であるため, これは不可能である. これより,  $G$  はハミルトン閉路をもたないことが示された.  $\square$

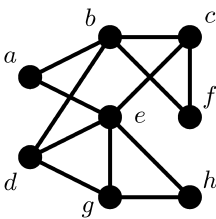


図9 グラフ  $H$

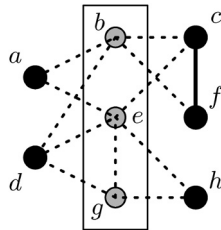


図10 グラフ  $H - S$

たとえば, 図9のグラフ  $H$  において  $S = \{b, e, g\}$  とおくと, 図10のように  $\omega(H - S) = 4 > 3 = |S|$  となるため,  $H$  は1-タフではない. したがって命題1より,  $H$  はハミルトン閉路をもたない.

### 3.3 開ナイトツアーとハミルトン道と弱1-タフ

前節までのハミルトン閉路に対する1-タフのような

性質は, ハミルトン道に対しても同様に見られる. 本節でこの点を述べるため, まずは問題1(2)の別解とその利用を与える.

ナイトツアーにおいて, 「始めのマスに戻らなくともよい」ことにしたものを開ナイトツアーと呼ぶ<sup>7</sup>. 問題1(1)にあるように  $5 \times 5$  のチェス盤にはナイトツアーは存在しないが, 開ナイトツアーは存在する<sup>8</sup>. その一方で,  $4 \times 4$  のチェス盤には開ナイトツアーも存在しない. これを, 問題1(2)の別解を使って示そう.

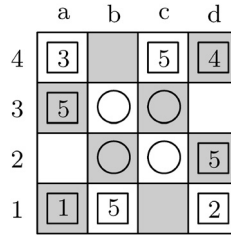


図11 マス b2, c2, b3, c3

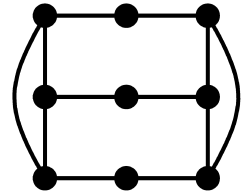


図12 1-タフなグラフ

**問題1(2)の解答例(その2):** 図11にある  $\circ$  の4マス b2, c2, b3, c3 に注目する. 先の解答例と同様に, a1, d1, a4, d4 の各マスにいるナイトは,  $\circ$  のいずれかのマスを経由しない限りほかのマスへは移動できない. 加えて,  $\boxed{5}$  の4マス b1, d2, a3, c4 のいずれかにいるナイトは, この4マス内は  $\circ$  のマスを使わずに移動可能だが, それ以外のマスへの移動は  $\circ$  のマスを経由する必要がある. これは図11の記号のない4マス c1, a2, d3, b4 についても同様である.

結局,  $\circ$  の4マスに対して, それ以外のマスは, a1, d1, a4, d4 の各グループ, および b1, d2, a3, c4 のグループ, c1, a2, d3, b4 のグループ, と六つのグループへと分けられ, どのグループもほかのグループへ移動するためには  $\circ$  のいずれかを經由する必要がある. したがって, どのグループから始めても  $\circ$  の4マスだけでは6グループすべてにはたどり着けず, (閉)ナイトツアーどころか開ナイトツアーさえ存在しない.  $\square$

この解答例にあるアイデアが, ハミルトン道に対する次の性質を示唆している: グラフ  $G$  において, 任意の頂点部分集合  $S$  で  $\omega(G - S) \leq |S| + 1$  が成り立つ. そのようなグラフ  $G$  を弱1-タフであるといい, 命題1と同様にして, 次の命題が証明できる.

<sup>6</sup> 正確には, グラフ  $G$  において, 頂点集合から  $S$  に属する頂点を, 辺集合から  $S$  の頂点に接続する辺を, それぞれ除去してできるグラフを  $G - S$  と記す.

<sup>7</sup> これに対し, 始めのマスに戻るものを閉ナイトツアーと呼ぶこともある.

<sup>8</sup> 本稿の主題から外れるため解答は載せないが, 興味のある方は探してほしい.

命題 2. ハミルトン道をもつグラフは弱1-タフである.

### 3.4 ハミルトン閉路の存在を保証するタフネス条件

命題 1 と命題 2 は簡単な証明で示されるが, これが 4 節と 5 節で重要な役割を果たす. その前に, 十分条件としてのタフネス条件を考えておく.

まず命題 1 の逆は, 一般には成り立たない. 実際に, 図 12 のグラフは 1-タフであるが<sup>9</sup>, ハミルトン閉路をもたない. 同様に, 弱 1-タフだがハミルトン道をもたないグラフが存在する<sup>10</sup>. これに対し, 十分大きな  $k$  での “ $k$ -タフである” という性質がハミルトン閉路の存在を保証できるか? という問題は, 当分野の大きな未解決問題である.

予想 1 (Chvátal [2]). ある定数  $k$  が存在して, 任意の  $k$ -タフなグラフはハミルトン閉路をもつ.

次節以降ではいくつかのグラフの族に注目し, それぞれの族でのタフネス条件の有用性と, ハミルトン閉路の応用を紹介したい.

## 4. チェス盤のナイトグラフ

### 4.1 ナイトグラフの定義

チェス盤の各マス目を頂点とし, “ナイトが一手で移動できる” ような頂点对を辺で結んだグラフをナイトグラフと呼ぶことにする. 特に,  $m \times n$  のチェス盤のナイトグラフを  $(m \times n)$ -ナイトグラフと言う. たとえば, 図 13 に  $(4 \times 4)$ -ナイトグラフを示す.

ナイトツアーはナイトグラフのハミルトン閉路と対応しており, タフネスの考え方が有効となる. 実際に, 3.1 節で挙げた問題 1 の解答例は  $(5 \times 5)$ -ナイトグラフおよび  $(4 \times 4)$ -ナイトグラフが 1-タフではないことを示しており, 命題 1 よりそれらはハミルトン閉路をもたないことがわかる. 加えて,  $(4 \times 4)$ -ナイトグラフでは  $S = \{b2, c2, b3, c3\}$  とおくと  $\omega(G - S) = 6 > 5 = |S| + 1$  となるため, そのようなグラフは弱 1-タフではなく, 命題 2 よりハミルトン道をもたない. これが 3.3 節の問題 1(2) の解答例 (その 2) で示したことである.

### 4.2 2部グラフとタフネス

$5 \times 5$  の場合をグラフ理論の言葉で説明しておこう. 「ナイトは白マスと黒マスを交互に移動する」という

<sup>9</sup> 実は, これを調べることは簡単ではない. 与えられたグラフが 1-タフであるかどうかを判定する問題は NP-完全であることが知られている [1].

<sup>10</sup> そのようなグラフの構成は問題として残しておく.

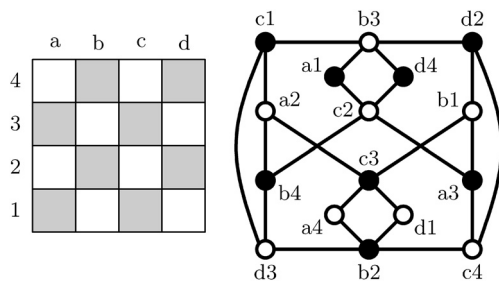


図 13  $(4 \times 4)$ -ナイトグラフ

性質から, ナイトグラフは 2部グラフであることがわかる. ここで, 頂点集合を, 二つの部分集合  $A, B$  に, “ $A$  の 2 頂点を結ぶ辺が存在せず, かつ  $B$  の 2 頂点を結ぶ辺も存在しない” ように分割することができるグラフを 2部グラフと呼ぶ. ナイトグラフは, 図 13 にあるように, 黒マスに相当する頂点の集合を  $A$ , 白マスに相当する頂点の集合を  $B$  とおくことで自然に上の分割が得られるため, 必ず 2部グラフとなる.

2部グラフ  $G$  では,  $A$  の頂点を取り除いてできるグラフ  $G - A$  には辺が存在しない. したがって  $B$  の各頂点が  $G - A$  の一つの連結成分を構成しており,

$$\omega(G - A) = |B|$$

が成り立つ. ここで  $|B| > |A|$  ならば, その 2部グラフは 1-タフではなく, 命題 1 よりハミルトン閉路が存在しない.  $|A| > |B|$  である場合も  $A$  と  $B$  を取り換えて考えれば同様である. したがって, 2部グラフが 1-タフであるためには  $|A| = |B|$  が必要であり, これから次を得る.

系 1. 頂点数が奇数の 2部グラフは 1-タフではなく, したがってハミルトン閉路をもたない.

### 4.3 ナイトツアー定理

チェス盤のナイトツアーについては, Euler [3] を始めとしていくつもの結果が示されており, 現在では以下の定理が知られている.

定理 1 (Schwenk [4]).  $m \leq n$  としたとき,  $m \times n$  のチェス盤にナイトツアーが存在するための必要十分条件は, 次のいずれもが成り立たないことである.

- (I)  $m$  と  $n$  がともに奇数である.
- (II)  $m = 1, 2$  または 4 である.
- (III)  $m = 3$  であり, かつ  $n = 4, 6$  または 8 である.

$S_1$  : AGTTA  
 $S_2$  : GCAGT  
 $S_3$  : GTTAAC  
 $S_4$  : AGGCA  
 $S_5$  : ACTG

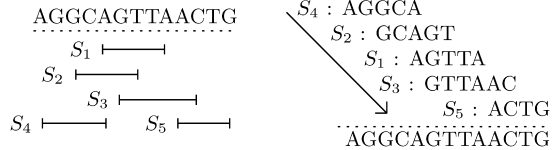
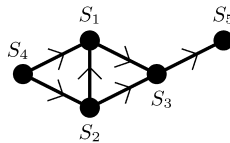


図 14 全ゲノムショットガン法による DNA の塩基配列の決定

この定理 1 の必要性を考えよう. (III) の  $m = 3$  かつ  $n = 8$  の場合は, そのナイトグラフが 1-タフであるにもかかわらずナイトツアーが存在しない<sup>11</sup>. しかしながら, その他の場合はすべて, 対応するナイトグラフが 1-タフではないことで示すことができる. 系 1 より (I) のときにナイトツアーが存在しないことがわかり, (II) の  $m = 4$  かつ  $n = 4$  の場合が問題 1(2) に相当する. (II) の  $m = 1, 2$  の場合は簡単なので, それ以外の場合を問題として残しておく.

**問題 2.**  $(3 \times 4)$ -ナイトグラフ,  $(3 \times 6)$ -ナイトグラフ, および, 任意の  $n \geq 5$  に対する  $(4 \times n)$ -ナイトグラフのそれぞれが 1-タフではないことを示せ.

なお, 同様に, 開ナイトツアーの非存在もナイトグラフが弱 1-タフではないことから示される場合がある. たとえば, 問題 1(2) の解答例 (その 2) では,  $4 \times 4$  の場合を述べている. 開ナイトツアーに対する定理 1 のような特徴づけはまだ知られていないようであるが, その一部を以下で問題としておく.

**問題 3.**  $(3 \times 5)$ -ナイトグラフと  $(3 \times 6)$ -ナイトグラフが弱 1-タフではないことを示せ.

問題 2 と 3 の解答は記さないが, 興味のある方は考えてほしい. また, ナイトツアーについてもっと知りたい方は [5] を参照されたい. 特に定理 1 の十分性など, 本項で紹介しなかった「どのようにナイトツアーを見つけるか」という点が, 詳しく述べられている.

## 5. 区間グラフ

### 5.1 区間グラフとタフネスとハミルトン閉路

数直線上の区間の集合  $\mathcal{I}$  に対し,  $\mathcal{I}$  を頂点集合とし,  $\mathcal{I}$  に属する二つの区間が共通部分区間をもつときに辺で結んでできるグラフを ( $\mathcal{I}$  に対する) 区間グラフと

呼ぶ. たとえば, 本特集の斉藤氏の記事における, 会議時間の重複を表現した図 1 のグラフは, (時間軸を数直線としてとらえた) 区間グラフである.

区間グラフにおいてはハミルトン閉路の存在とタフネスが強く関係しており, 次のことが知られている.

**定理 2** (Broersma et al. [6]).  $G$  を区間グラフとすると, 次の二つが成り立つ.

- (I)  $G$  がハミルトン閉路をもつための必要十分条件は  $G$  が 1-タフであることである.
- (II)  $G$  がハミルトン道をもつための必要十分条件は  $G$  が弱 1-タフであることである.

さらに, Keil [7] は定理 2(I) を暗黙のうちに使い, 区間グラフにおけるハミルトン閉路の存在性を線形時間で判定するアルゴリズムを与えている.

### 5.2 DNA の塩基配列決定問題

区間グラフの有用性の例として, DNA の塩基配列決定問題を挙げておく. DNA は, アデニン (A), グアニン (G), シトシン (C), チミン (T) の 4 種類の塩基の順列で構成されており, この順列を決定する問題が塩基配列決定問題である. この 1 手法として知られている全ゲノムショットガン法 (Whole Genome Shotgun Sequencing) は, 区間グラフを用いたものである.

この方法では, まず, 一本の DNA をいくつかの小断片に分割する. ただし, 分割された小断片は前後の小断片とある程度の長さの共通部分をもっている. このとき, 小断片の集合を頂点集合とし, 端点に共通な塩基配列をもつ二つの小断片を辺で結んだグラフを考えると, これは区間グラフであることがわかる.

たとえば, 図 14 左では, ある DNA が五つの小断片  $S_1, \dots, S_5$  へと分割されている. このとき,  $S_1$  の最初の 3 文字と  $S_2$  の最後の 3 文字がともに AGT であるため,  $S_2$  の直後に  $S_1$  を配置できるという意味で  $S_1$  と  $S_2$  を辺で結ぶ. ただし,  $S_2$  の後ろに  $S_1$  を配置できるが, 逆に  $S_1$  の後ろに  $S_2$  を配置できないため, ここでは通常対称的な辺ではなく, 向きが付けられ

<sup>11</sup>解答は記さないが, 興味がある方は調べてほしい.

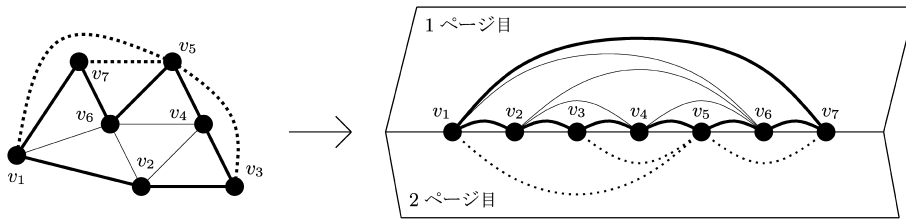


図 15 ハミルトン閉路をもつ平面グラフの 2-ページ埋め込み

た有向辺として結ぶことにする<sup>12</sup>。以下同様に、そのようなペアを有向辺で結んでできるグラフが図 14 中央左であり、図 14 中央右のような DNA の塩基配列に対応している区間グラフである。

なお、この場合の塩基配列はハミルトン道から得ることができる。たとえば図 14 中央左のグラフには(辺を向きに沿ってたどる)ハミルトン道  $S_4, S_2, S_1, S_3, S_5$  が存在し、小断片を図 14 右のようにこの順に並べることで、塩基配列が決定できた。

## 6. 平面グラフ

応用上、そして理論上の重要なグラフの族が平面グラフである。ここで、辺の交差なく平面に埋め込まれたグラフを平面グラフと呼ぶ<sup>13</sup>。たとえば、現実の道路ネットワークや電子回路の配線基板などは、通常は平面グラフとして表されており<sup>14</sup>、これらへの応用において平面グラフにおけるハミルトン閉路が有効となる。

次節で平面グラフのタフネスとハミルトン閉路の関係を述べたのち、6.2 節、6.3 節でそれぞれ本型埋め込みと地図の塗り分け問題への応用について述べる。

### 6.1 平面グラフとタフネスとハミルトン閉路

残念ながら多くのナイトグラフや区間グラフの場合とは異なり、平面グラフに対しては 1-タフという性質はハミルトン閉路の存在のための十分条件とはならない<sup>15</sup>。しかしながら、次の結果が知られている。

**定理 3** (Tutte [8]).  $t > 3/2$  に対し、 $t$ -タフな平面グラフはハミルトン閉路をもつ。

<sup>12</sup>このように各辺に向きが付けられたグラフを有向グラフと呼ぶ。この意味で通常のグラフは無向グラフとも呼ばれる。

<sup>13</sup>厳密な定義は、本特集の野口氏の記事を参照されたい。

<sup>14</sup>現実の道路ネットワークは立体交差などが存在するため、平面グラフには完全には対応していないが、そのような交差は(全体に比べて)それほど多くはなく、ある意味で平面グラフに“近い”グラフとしてモデル化されている。したがって、平面グラフと同様の手法が適用できることが多い。

<sup>15</sup>たとえば図 12 のグラフは 1-タフな平面グラフだが、ハミルトン閉路をもたない。

さらに、この条件を満たす平面グラフにおけるハミルトン閉路を線形時間で見つけるアルゴリズムも与えられている [9]。また、定理 3 の  $t$  の条件は最善である。すなわち、 $3/2$ -タフな平面グラフでハミルトン閉路をもたないものが知られている [10]。加えて、与えられた平面グラフにハミルトン閉路が存在するかどうかを判定する問題は、一般には NP-完全である [11]。

### 6.2 ハミルトン閉路と 2 ページ埋め込み

2 節で述べたように、グラフの本型埋め込みがハミルトン閉路を使って構成できることが知られている。実際に、次の結果を示しておく。

**命題 3** (Bernhart and Kainen [12]). ハミルトン閉路をもつ平面グラフは 2 ページ埋め込みをもつ<sup>16</sup>。

**証明.** ハミルトン閉路  $C$  をもつ平面グラフ  $G$  を考えると、 $C$  は平面を内部と外部に分割している。ここで、頂点を  $C$  に沿って本の背に並べることで、 $C$  の辺および内部の辺を本の 1 ページ目に、外部の辺を 2 ページ目に、それぞれ辺の交差なく描くことができ、全体でグラフ  $G$  の 2 ページ埋め込みが得られる。□

たとえば、図 15 左の平面グラフは、

$$C = v_1, v_2, \dots, v_7, v_1$$

という太線のハミルトン閉路をもち、 $C$  は  $C$  以外の辺を内部(細線)と外部(点線)へと分けている。これより、図 15 右の 2 ページ埋め込みが得られる。

このように、平面グラフのハミルトン閉路から直接的に 2 ページ埋め込みを得ることができる。さらにこのアイデアを進め、ハミルトン閉路が存在しない場合にも、ある意味でそれに“近い”性質をもつ閉路を用いることで、ページ数の少ない埋め込みを得る方法が知られている [13, 14]。

<sup>16</sup>Bernhart and Kainen [12] はこの逆も“ほぼ”成り立つことを述べている。

### 6.3 ハミルトン閉路と四色定理

平面上の線分の集合を地図と言ひ、平面からその線分たちを除いた各領域を国と呼ぶ。簡単のため、地図のどの線分上のどの点も二つ以上の国の境界に含まれると仮定する<sup>17</sup>。各国への色の割り当てで、「共通の境界線分をもつ国には異なる色を与える」という条件を満たすものを、地図の塗り分けと呼ぶ。特に、「4色あればどのような地図も塗り分け可能である」という命題が四色定理 [15] である。

与えられた地図は、三つ以上の国の境界に含まれる点を頂点とし、国の境界を自然に辺として捉えることで平面グラフとみなせる。これを地図の境界グラフと呼ぼう。この境界グラフがハミルトン閉路をもつ場合は、直ちに塗り分けが得られることが知られている。

**命題 4** (Tait [16]). 境界グラフがハミルトン閉路をもつ地図は、高々 4 色での塗り分けが可能である。

**証明** . 与えられた地図に対し、その境界グラフのハミルトン閉路を  $C$  とおく。命題 3 の証明と同様に、 $C$  は平面を内部と外部に分割する。このとき、内部の国たちは 2 色で塗り分けることができ<sup>18</sup>、また、外部の国たちを同様にしておかの 2 色で塗り分けすることで、全体の地図の 4 色での塗り分けが得られる。 □

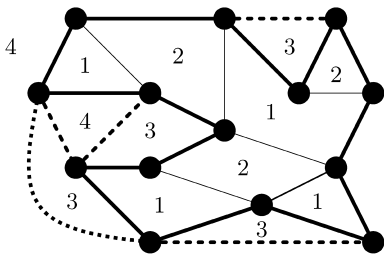


図 16 地図の 4 色での塗り分け

たとえば、図 16 のグラフを境界グラフとしてもつ地図を考える。この境界グラフは太線のハミルトン閉路をもち、その内部の国たちを色 1 と 2 で塗り分け、外部の国たちを色 3 と 4 で塗り分けしている。

<sup>17</sup>このあたりは厳密な定義をしているが、通常の地図を思い浮かべれば十分である。

<sup>18</sup>これが可能なことは示さないが、簡単な帰納法で示すことが可能である。本特集の土屋氏・斎藤氏の記事の言葉を借りると、「内部の双対グラフが木」、「どのような木も 2 部グラフ」、「どのような 2 部グラフも 2 色で彩色可能」という三つの事実から示される。

Tait [16] は命題 4 と次の“定理”を用いて四色定理を証明した、と主張した：「任意の 3-正則な多面体的グラフ<sup>19</sup>はハミルトン閉路をもつ。」しかしながら、この“定理”はのちに Tutte [17] により反例が与えられ、残念ながら四色定理の証明とはなっていない。この誤った“定理”は、その後 Bernette が修正版を提案しており、これは重要な未解決問題となっている。

**予想 2** (Barnette [18]). 任意の 3-正則な多面体的 2 部グラフはハミルトン閉路をもつ。

## 7. まとめ

本稿では、まずハミルトン閉路の存在とタフネスの関係について述べた。特に、チェス盤のナイトグラフや区間グラフでは「グラフが 1-タフである」というハミルトン閉路の存在のための簡単な必要条件 (命題 1) が、 $(3 \times 8)$ -ナイトグラフの場合を除き、十分条件となることを示した。すなわち、1-タフではないことがハミルトン閉路が存在しないことの“証拠”となっている。また、平面グラフでは、 $t > 3/2$  に対し  $t$ -タフであればハミルトン閉路をもつ。これらの結果はハミルトン閉路とタフネスの間の強い相関関係を示している。

また、そこから得られる結果がさまざまな状況でのハミルトン閉路の応用につながっており、本稿ではそのいくつかを紹介した。さらなる応用が広がることを期待して本稿を終えたい。

## 参考文献

- [1] D. Bauer, S. L. Hakimi and E. Schmeichel, “Recognizing tough graphs is NP-hard,” *Discrete Applied Mathematics*, **28**, pp. 191–195, 1990.
- [2] V. Chvátal, “Tough graphs and hamiltonian circuits,” *Discrete Mathematics*, **5**, pp. 215–228, 1973.
- [3] L. Euler, “Solution d’une question curieuse que ne paroit soumise a aucune analyse,” *Mémoires de l’Academie Royale des Sciences et Belles Lettres*, **15**, pp. 310–337, 1759.
- [4] A. J. Schwenk, “Which rectangular chessboards have a knight’s tour?” *Mathematics Magazine*, **64**, pp. 325–332, 1991.
- [5] G. P. Jelliss, Knight’s Tour Notes, <http://www.mayhematics.com/t/t.htm> (2016 年 11 月 7 日閲覧)
- [6] H. Broersma, J. Fiala, P. A. Golovach, T. Kaiser, D. Paulusma and A. Proskurowski, “Linear-time algorithms for scattering number and Hamilton-connectivity of interval graphs,” *Journal of Graph Theory*, **79**, pp. 282–299, 2015.

<sup>19</sup>各頂点にちょうど三つの国が集まっている地図の境界グラフを **3-正則**であるといい、多面体の頂点と辺をそのままグラフの頂点と辺とみなしたものを多面体的グラフという。

- [7] J. M. Keil, "Finding Hamiltonian circuits in interval graphs," *Information Processing Letters*, **20**, pp. 201–206, 1985.
- [8] W. T. Tutte, "A theorem on planar graphs," *Transactions American Mathematical Society*, **82**, pp. 99–116, 1956.
- [9] N. Chiba and T. Nishizeki, "The Hamiltonian cycle problem is linear-time solvable for 4-connected planar graphs," *Journal of Algorithms*, **10**, pp. 187–211, 1989.
- [10] J. Harant, "Toughness and nonhamiltonicity of polyhedral graphs," *Discrete Mathematics*, **113**, pp. 249–253, 1993.
- [11] M. R. Garey, D. S. Johnson and L. Stockmeyer, "Some simplified NP-complete problems," In *Proceedings of the 6th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '74)*, pp. 47–63, 1974.
- [12] F. Bernhart and P. C. Kainen, "The book thickness of a graph," *Journal of Combinatorics Theory, Series B*, **27**, pp. 320–331, 1979.
- [13] J. F. Buss and P. W. Shor, "On the pagenumber of planar graphs," In *Proceedings of the 16th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC'84)*, pp. 98–100, 1984.
- [14] A. Nakamoto, T. Nozawa and K. Ozeki, "Book embedding of graphs on the projective plane," submitted, 2016.
- [15] K. Appel and W. Haken, "Every planar map is four colorable," *Bulletin of the American Mathematical Society*, **82**, pp. 449–456, 1976.
- [16] P. G. Tait, "Remarks on the colouring of maps," In *Proceedings of Royal Society London*, **10**, p. 729, 1880.
- [17] W. T. Tutte, "On Hamiltonian Circuits," *Journal of the London Mathematical Society*, **2**, pp. 98–101, 1946.
- [18] D. W. Barnette, "Conjecture 5," In *Recent Progress in Combinatorics: Proceedings of the Third Waterloo Conference on Combinatorics*, W. T. Tutte (ed.), Academic Press, 1969.