グラフの部分彩色とその拡張問題

斎藤　明

資源割り当て問題やある種のスケジューリングなど，経営工学上の問題の中にはグラフの彩色に還元されるものがある．本稿では具体的な問題例から始めて，グラフの彩色の基本的な概念や結果を紹介する．また現実の問題では，一度最適解が得られた後に新たなデータや制約条件が追加された場合，今ある解を破棄して再び最適解を構築し直すことが許されないことがある．そのような場合には，既存の解を拡張することで準最適解を得ることが現実的なアプローチとなる．このアプローチを支えるテーマに部分彩色の拡張と呼ばれる概念がある．本稿ではグラフの部分彩色の拡張についても解説を試みる．

キーワード：グラフの彩色，部分彩色，リスト彩色

1. はじめに

グラフの彩色はグラフ理論における大きなテーマの一つであり，工学的にも幅広い応用をもつ．本稿ではグラフの彩色を紹介し，後半では比較的新しい話題である部分彩色の拡張問題を解説する．

まず経営工学上の問題の例をいくつか取り上げ，それらをグラフの問題に還元することで，彩色を紹介する．第一の例として，会議室の割り当て問題を考えよう．表1はある会社がある日に予定している会議とその開催時間を表している．これらの会議をすべて開くために，何室の会議室を確保しておけばよいだろうか．

たとえば会議Aと会議Bの開催時間には重なりがあるので，これらの二つの会議は異なる会議室で開かなければならない．一方会議Aと会議Cは開催時間が重なっていないので，一つの会議室で（異なる時間帯に）開くことができる．さらに会議Dの開催時間は会議A，会議Cの開催時間と重複しないので，一つの会議室でこれら三つの会議をまかなうことができる．しかしこれら三つの会議を1室に割り当てることが最良の選択なのだろうか．会議A, C, Dを同じ会議室に割り当てるとほかの会議の割り当てに無理が生じ，結果的に最適な（会議室数最小の）割り当てに至らないかもしれない．

この問題を解くために，会議を頂点で表し，開催時間が重複している会議を辺で結ぶことにより，グラフを作る．すると図1左のようなグラフが得られる．そしてグラフの頂点を，辺で隣接する頂点の色が同じにならないように塗り分けてみる．図1右は，左のグラフの頂点の塗り分けの例である（ここでは色を整数で表している）．頂点A, C, Dに色1, B, Hに色2, Fに色3, E, Gに色4が塗られており，同じ色の頂点を結ぶ辺は存在しない．したがって同色の頂点集合に対応する会議は一つの会議室でまかなうことができる．このグラフの頂点集合は4色で塗り分けられたので，会議室を4室確保すればすべての会議を開催することができる．

この例では会議が会議室という資源を利用したが，これに類する問題は数多くある．一般に複数の主体（この例では会議）が共有できない状況下で資源（この例では会議室）を利用する問題はグラフの頂点の塗り分

	開催時間
会議A	9:00～10:15
会議B	9:00～ 9:30
会議C	11:00～11:15
会議D	11:45～12:15
会議E	9:15～ 9:45
会議F	9:15～10:45
会議G	10:30～12:00
会議H	10:00～11:30

表1　ある日の会議

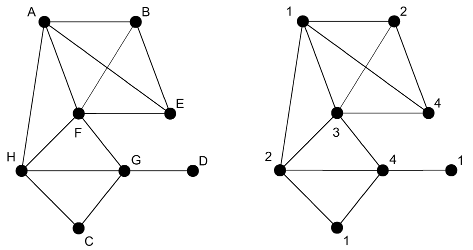

図1　会議時間の重複を表現するグラフとその頂点彩色

さいとう　あきら
日本大学文理学部
〒156–8550 東京都世田谷区桜上水3–25–40
asaito@chs.nihon-u.ac.jp

けに帰着する．

第二の例として大学の試験時間割り作成を考えよう．ある大学の教務担当者が期末試験の時間割りを考えている．できるだけ多くの授業時間を確保するために，可能な限り多くの試験を並行実施して試験期間を短くしたい．一方受講者に重複がある講義の試験を並行実施することはできない．さてどうすればよいだろうか．

この問題もグラフの彩色に帰着される．試験を行う講義を頂点で表し，共通の受講者がいる講義を辺で結ぶことによりグラフを作る．そして同色の頂点が辺で隣接しないように頂点集合を塗り分ける．すると同色の頂点集合に対応する講義には共通の受講者がいないので，試験を並行実施できる．試験期間を短くするためには，できるだけ少ない色数でグラフの頂点を塗り分ければよい．

第三の例として地図の塗り分けを考えよう．ある地図職人が大陸のさまざまな地方の地図を作成している．各国には色を塗って，その国の国境をはっきりさせたい．このためには，国境を隔てて隣接する国を異なる色で塗らなければならない．一方この地図職人はできるだけ安価に地図を提供したいと考えており，そのために使用する色の数はできるだけ少なくしたい．さてこの地図職人は何色の色を用意しておけばよいだろうか．

この問題の答えは「4 色」である．4 色あれば，いかなる地図でも国境を隔てて隣接する国に異なる色を与えて塗り分けることができる．これは「4 色定理」として知られている．4 色定理の証明はその最初のステップで問題をグラフに還元している．各国の首都を頂点とし，国境を隔てて隣接する国の首都を辺で結ぶことによりグラフを作る．このグラフの頂点集合を 4 色で塗り分けることができれば，首都に割り当てた色でその国を塗ることにより，地図を塗り分けることができる．

以上三つの問題を見てきたが，これらはいずれも

- 与えられたグラフの頂点たちを，同色の頂点が辺で隣接しないようにできるだけ少ない色数で塗り分けよ．

という問題に還元された．これがグラフの彩色である．

2. グラフの彩色

グラフの彩色を定式化しよう．グラフ G の頂点集合 $V(G)$ の部分集合 S について，S の中の 2 頂点を結ぶ G の辺が存在しないとき，S を**独立集合**，または**安定集合**と呼ぶ．G の各頂点に色を塗ることを**着色**という．より厳密には，着色は $V(G)$ から正整数の集合 $\{1, 2, 3, \dots\}$ への写像である（各整数が使われる色に対応する）．与えられた着色 $c\colon V(G) \to \{1, 2, 3, \dots\}$ について，もしすべての正整数 k について $c^{-1}(k)$（色 k で塗られている頂点の集合）が G の独立集合になるならば，c を G の **彩色**と呼ぶ．この定義によれば，色として用いる正整数は連続する必要もなければ，1 を含む必要もない．しかし色の値自体に意味はないので，通常グラフの彩色では色を $1, 2, 3, \dots$ と使っていくことが慣例となっている．本稿でもこの慣例に従う．

使う色の数にこだわらないのであれば，G の彩色を一つ与えることは簡単である．すべての頂点に異なる色を与えればよい．そこでできるだけ少ない色数の彩色を求めることが興味の中心となる．もし $c\colon V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ が彩色になっていれば，言い換えれば c が高々 k 色を用いる彩色であれば，c を $\boldsymbol{k}$**-彩色**と呼ぶ．また k-彩色をもつグラフは $\boldsymbol{k}$**-彩色可能である**という．G が k-彩色可能であるような最小の k を G の**染色数**と呼び，$\chi(G)$ と表す．（奇妙なことに，$\chi(G)$ は「彩色数」ではなく「染色数」と呼ぶことが慣例になっている．「彩色」，「染色数」はそれぞれ “coloring”，“chromatic number” の日本語訳であり，これらの概念が日本に入ってきたときに，異なる英単語に異なる日本語訳をあてててしまったためだと思われる．）

2-彩色可能なグラフは 2 部グラフとして知られており，与えられたグラフが 2 部グラフであるかどうかは簡単に判定できる．連結グラフ上の 2 頂点 x，y に対して，x と y を結ぶ最短の道の長さ（辺の本数）をそのグラフのおける x と y の**距離**と呼び，$\boldsymbol{d_G(x, y)}$ と表す．G が連結グラフならば，G の 1 頂点 x を固定し，この頂点を出発点として，本特集号記事「経路問題と離散数学」で紹介されている幅優先探索を実行する．すると x から各頂点までの距離を求めることができる．x からの距離が偶数の頂点集合 V_0 と奇数の頂点集合 V_1 に分けると，もし G が 2 部グラフならば V_0 と V_1 がそれぞれ G を 2-彩色したときに同色となる頂点の集合（部集合と呼ばれる）となるので，あとは V_0 と V_1 が独立集合であるか否かを調べればよい．G が非連結ならば，各成分ごとに同じアルゴリズムを走らせればよい．

上記の観察から，$k \geq 3$ においても与えられたグラフが k-彩色可能であるか否かを判定することは容易だろうと思うかもしれない．しかしこの直感は正しくない．$k \geq 3$ のとき，与えられたグラフ G が k-彩色可能であるか否かを判定する問題は NP-完全であることが知られている．NP-完全問題に多項式時間アルゴリズムを与えることはほぼ絶望的であり，この判定問題

は極めて難しい．また判定問題が NP-完全であるような性質については，きれいな特徴づけが得られないと信じられており，彩色問題についても $k \geq 3$ において k-彩色グラフの特徴づけは得られていない．そこで研究の中心は，与えられたグラフの染色数の上界，下界を求めることとなる．

先ほどの図 1 のグラフを見てみよう．すでに見たように，このグラフは 4-彩色可能である．一方このグラフは 3-彩色可能ではない．なぜならばこのグラフの 4 頂点 {A, B, E, F} は互いに辺で結ばれた部分グラフを成すからである．一般にすべての頂点間に辺があるグラフを**完全グラフ**と呼び，頂点数 n の完全グラフを $\boldsymbol{K_n}$ で表す．与えられたグラフに部分グラフとして K_n が存在すれば，この部分を彩色するために n 色が必要なので，$\chi(G) \geq n$ となる．与えられたグラフ G に含まれる最大の完全部分グラフの位数（頂点数）を G の**クリーク数**と呼び，$\boldsymbol{\omega(G)}$ と表す．今の考察から $\chi(G) \geq \omega(G)$ である．ただしこれは一般には $\chi(G)$ のよい下界とは言えない．たとえば頂点数 5 以上の奇数位数のサイクル（各頂点にちょうど 2 本の辺が接続する連結グラフ）を考えると，この中に K_3 は含まれず，このグラフのクリーク数は 2 となるが，奇数位数のサイクルの染色数は 3 である．より一般に，任意の正整数 k について，$\chi(G) > k$ かつ $\omega(G) = 2$ を満たすようなグラフが存在することも知られている．

染色数の上界については，Brooks の定理が最もよく知られている定理であろう．グラフ G の頂点の次数の最大値を G の**最大次数**と呼び，$\boldsymbol{\Delta(G)}$ で表す．

定理 1 (Brooks の定理)**.** 連結グラフ G が完全グラフでも奇数位数のサイクルでもなければ，$\chi(G) \leq \Delta(G)$ である．

ここから直ちに系として「任意のグラフ G について $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$ である」ことが導かれる．この系は頂点数に関する帰納法で簡単に証明できるので，紹介しておこう．$d = \Delta(G)$ とおく．$|V(G)| = 1$ のとき G は明らかに 1-彩色可能である．そこで $|V(G)| \geq 2$ としよう．G の頂点 x を取り，G から x と x に接続する辺をすべて除去して，G よりも 1 頂点少ないグラフ G' を作る．$\Delta(G') \leq \Delta(G) = d$ なので，帰納法の仮定から G' は $d+1$ 色で彩色できる．さて x は 高々 d 個の頂点 $y_1, \ldots, y_m$ と隣接している $(m \leq d)$．G' は $d+1$ 色で彩色されているので，$y_1, \ldots, y_m$ の彩色に使われていない色がある．その色で x を塗れば，G の中で隣接する同色の頂点は存在せず，これは G の $(d+1)$-彩色となっている．

本来の Brooks の定理の証明はこれよりはやや複雑だが，それほど難しいものではなく，たいていのグラフ理論の教科書に掲載されている．

Brooks の定理はグラフの染色数の上界を与える有名な定理だが，残念ながらこの定理も一般にはよい上界とは言えない．たとえば任意の正整数 k に対して，それぞれの部集合の位数が k である完全 2 部グラフ（異なる部集合に属する 2 頂点すべての間に辺が存在する 2 部グラフ）の最大次数は k である．しかしこのグラフは 2 部グラフなので染色数は 2 である．したがって最大次数と染色数の差がいくらでも大きくなるグラフの系列が存在する．

初めの問題例に挙げた 4 色定理も有名な定理である．どの 2 辺も交差しないように平面上に描くことができるグラフを**平面的グラフ**と呼ぶ．4 色定理は任意の平面的グラフが 4-彩色可能であると主張する．

グラフの彩色はグラフ理論における古典的な問題であり，ほぼすべての教科書でかなりのページを割いて解説されている．本稿に上げたもの以外にも染色数に関する数多くの上界，下界が存在するので，興味のある読者は参照されたい．

3. 部分彩色の拡張問題

この節では，教科書ではまだ取り上げられていないが，工学的応用から近年注目されつつある，部分彩色の拡張問題を解説する．初めの会議室の例に戻ろう．表 1 の予定に基づく会議室の割当は，会議当日の 1 週間前に作成されたものとしよう．したがって会議室の割当を組んだ後に新たな会議が入るかもしれない．そこで会議室割当作成担当者は前日に改めて会議の予定を見直し，新たに入ってきた会議の開催時間を見て会議室の割当を調整する．この際，担当者は全く白紙の状態から割当を組み直すことはできないかもしれない．たとえば図 1 の彩色に基づいて，すでに会議 A〜H の参加者に会議室の告知がなされているのであれば，開催前日の変更は混乱を招く．この場合，担当者は既存の会議室の割当を変更することなく，追加された会議の割当を決めなければならない．

この状況を定式化しよう．グラフ G の頂点集合 $V(G)$ の部分集合 S について，S を頂点集合とし，S の 2 頂点を結ぶ G の辺すべてを辺集合とする G の部分グラフを $\boldsymbol{G[S]}$ で表し，$\boldsymbol{S}$ **で誘導される** G の部分グラフと呼ぶ．$G[S]$ の彩色を S の**部分彩色**と呼び，

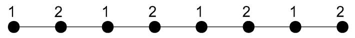

図 2　位数 8 の道の 2-彩色

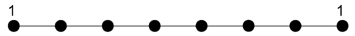

図 3　この部分彩色は 2-彩色に拡張できない

それが高々 k 色の色を用いているとき，**k-部分彩色**と呼ぶ．与えられた部分彩色 $f\colon S \to \{1, 2, \ldots, k\}$ に対し，G の彩色 c で，各 $v \in S$ について $c(v) = f(v)$ を満たすものを部分彩色 f の**拡張**と呼ぶ．与えられた部分彩色 f について，できるだけ使用する色数が少ない f の拡張を求める問題を**部分彩色の拡張問題**と呼ぶ．

与えられたグラフ G の染色数が k であり，その一部の頂点が k-部分彩色されていても，それを G の k-彩色に拡張できるとは限らない．たとえば図 2 のような偶位数の道を考えよう． 道は 2 部グラフであり，したがって 2-彩色可能である．より具体的には，端点から始めて 2 つの色を交互に使って頂点を塗れば，偶位数の道の 2-彩色は簡単に得られる．またこの彩色が道の彩色として本質的に唯一のものである（使う色を一斉に交換することにより形式的には異なる彩色を得るが，このような色の置換だけで得られる彩色は本質的に同じものとみなす)．一方この彩色において，偶位数の道の二つの端点は異なる色で塗られる．したがって始めに偶位数の道の両端点を同じ色で部分彩色してしまうと，これを道の 2-彩色に拡張することはできない (図 3)．

これは単純な例だが，部分彩色拡張問題の困難さをよく示している．すなわち

- 2 頂点しか部分彩色していない．
- 部分彩色に用いる色は 1 色である．
- 始めの道の位数を大きく取ることにより，部分彩色される 2 頂点の距離はいくらでも大きくすることができる．

しかしこの部分彩色を道の 2-彩色に拡張することはできないのである．実はこれは 2-彩色に限ったことではない．2 以上の任意の整数 k と l について，

- $\chi(G) = k$.
- $d_G(x, y) \geq l$.
- しかし x と y を同じ色 1 色で部分彩色すると，それを G の k-彩色に拡張できない．

となる 2 頂点 x, y を含むグラフ G が存在することが知られている．グラフ内の遠く離れた 2 頂点を 1 色で部分彩色するだけで，それを染色数と同じ色数で拡張できることが保証されないのである．

上記の例があるため，染色数と同じ色数での部分彩色拡張については，あまり多くの結果が知られていない．一方染色数に加えて新たな色を導入することにより部分彩色を拡張する試みは一定の成功を収めている．ここでは余分な色を 1 色だけ加え，$\chi(G) + 1$ 個の色で部分彩色を拡張する問題を考えよう．

直感的には，部分彩色された頂点がグラフ内の一部に密集していると，それらが周囲の頂点の彩色に与える制約が重層的になり，$\chi(G)+1$ 色での拡張を難しくしそうである．逆に言えば，部分彩色された頂点の分布が疎であれば，これらが周囲に及ぼす制約の相互作用が弱くなり，$\chi(G) + 1$ 色での拡張に望みが出てくる．ここで問題となるのは「疎な分布」の定義である．Thomassen は疎な分布を測る尺度として最小距離を提唱した．

連結グラフ G の中のいくつかの頂点の集合 S（ただし $|S| \geq 2$ とする）について，$d(S) = \min\{d_G(x, y)\colon x,\ y \in S,\ x \neq y\}$ とおき，S の**最小距離**と呼ぶ．定義から，$d(S) \geq l$ であることと S の中の任意の相異なる 2 頂点が G 上で互いに距離 l 以上離れていることは同値である．また $d(S)$ が大きくなっていけば，直感的に S の頂点の分布が疎になっていく．したがって「$d(S)$ が十分大きければ S の $\chi(G)$ 色の部分彩色は G の $\chi(G) + 1$ 色の彩色に拡張できる」という問題設定ができる．もし一般のグラフで解くことが難しければ，考えるグラフのクラスを絞り込んでもよい．

以上のような背景の下で Thomassen は次のような問題を問いかけた (cf. [1])．

- G を平面的グラフとし，$S \subset V(G)$ とする．もし $d(S) \geq 100$ ならば S の 4-彩色を G の 5-彩色に拡張できるだろうか．

4 色定理より，平面的グラフは 4-彩色可能であることが知られているので，Thomassen は S の部分彩色の拡張に 5 色を用意している．

Thomassen の問題提起から 1 年後, Albertson [2] はこの問題を驚くべき形で解決した．

定理 2 (Albertson [2])**.**　G を r-彩色可能なグラフとし，$S \subset V(G)$ とする．もし $d(S) \geq 4$ ならば，S の $(r+1)$-部分彩色を G の $(r+1)$-彩色に拡張できる．

Albertson の定理は Thomassen の問題をはるかに強い形で解いている．まず定理 2 は対象を平面的グラフに限定していない．$d(S) \geq 4$ の条件さえ満たしていれ

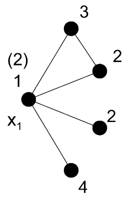

図 4　x_1 の色を 1 から 2 に変えたい

ば，そのグラフが平面的であろうが，非平面的であろうがかまわない．また元となるグラフの染色数にも制限がない．また何よりも最小距離の仮定が Thomassen が置いた仮定よりもはるかに弱い．Thomassen 自身 100 という数値に何の根拠ももっていなかったことは容易に想像できる．「十分大きい最小距離の仮定の下」という気持ちに具体性を与えるためだけの数値設定である．まずは下界の存在だけを保証しておいて，それができたら，次のステップとしてその下界を現実的なものにしようと考えていたのであろう．しかし定理 2 が要求する最小距離の下界はわずかに 4 である．実際 Albertson は 4 という下界は最良で，最小距離の下界を 3 に下げると，もはや帰結が成り立たないことを示している．

Albertson による定理 2 の証明が短く簡単であったことも，当時の研究者を驚かせた．彼のアイデアは「S の部分彩色をひとまず無視して，まずは G の頂点を染色数の色数で塗ってしまう」ことにある．彼のアイデアと証明を伝えるために，r-彩色されているグラフ G と $S \subset V(G)$ について，S が 色 $\{1, 2, \ldots, r, r+1\}$ で彩色されているとしよう．

まず Albertson は S の部分彩色を無視して，G を $\{1, 2, \ldots, r\}$ で彩色する．G は r-彩色可能なので，これは可能である．しかし部分彩色を無視して塗ったので，S の頂点は部分彩色がその頂点に要求する色とは異なる色で塗られているかもしれない．そこで彼は残る $r+1$ 番目の色を用いて，S の頂点の色を部分彩色が要求する色に塗り直していく．$S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ とし，x_1 から順に色を塗り直していこう．

図 4 の例を見てみよう． 各頂点についている数字は，G を r-彩色したときの色，括弧内の数字は部分彩色が S の頂点に要求する色である．この例では x_1 の部分彩色は 2 であるが，今のところ 1 で塗られている．図 4 のように x_1 の近傍（x_1 に隣接する頂点の集合）の中に 2 で塗られている頂点がある場合，いきなり x_1 の色を 1 から 2 に変えることはできない．ところが今 G は r-彩色されているので，色 $r+1$ はグラ

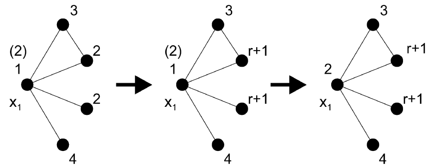

図 5　近傍の色 2 を $r+1$ に変更後 x_1 を塗り直す

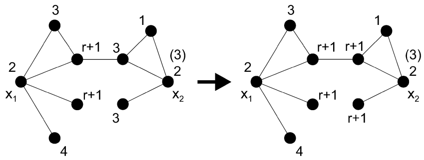

図 6　x_2 の近傍に $r+1$ を塗ると彩色の条件が壊れる

フ内に現れていない．そこで x_1 の近傍で 2 で塗られている頂点の色を 2 から $r+1$ に取り替えよう．今まで現れていない色で塗り直すので，塗り直した後の着色も G の彩色である．しかも x_1 の近傍には色 2 の頂点が存在しない．そこで 今度は彩色の条件を損なうことなく x_1 の色を 1 から 2 に塗り替えることができる（図 5）．

次に頂点 x_2 を塗り替えることを考えよう．先ほどと同様に，現在の x_2 の色と部分彩色が要求する色が異なっていた場合，まず x_2 の近傍で x_2 に要求される部分彩色の色と等しい色で塗られている頂点を色 $r+1$ で塗り，次に x_2 の色を塗り直す．ただし今度は G の頂点の中に色 $r+1$ で塗られているものがあるので，注意が必要である．実際に，一般の状況では Albertson の戦略は破綻することがある．

図 6 を見てみよう．現在 x_2 の色は 2 だが，部分彩色では 3 なので，2 から 3 に塗り直したい．ところが先ほどの x_1 の色の塗り直しの際に x_1 の近傍に色 $r+1$ が現れており，この頂点と x_2 の近傍で色 3 が塗られている頂点が隣接しているために，この頂点に色 $r+1$ を与えることができない．Albertson の戦略は x_2 で失敗する．

ところが，この図では x_1 と x_2 を結ぶ長さ 3 の道がある．したがって $d_G(x_1, x_2) \leq 3$ である．これは仮定である $d(S) \geq 4$ に反する．この観察から分かるように，もし Albertson の戦略に従って色の塗り替えを進めていく際，頂点 x_i の近傍に色 $r+1$ を与えることにより，x_j $(j < i)$ の塗り直しの際に現れた 色 $r+1$ の頂点と隣接してしまうならば，$d_G(x_i, x_j) \leq 3$ となり $d(S) \geq 4$ の仮定に反する．したがって $d(S) \geq 4$ の仮定の下では，Albertson の戦略は破綻することなく

$x_1, \ldots, x_k$ を部分彩色の要求する色に取り替えていくことができるのである.

Albertson の定理とそのエレガントな証明が発表されて以来, 部分彩色の問題は多くの研究者によって研究されている. Albertson and Moore [3] は Albertson の戦略を詳しく分析し, $S \subset V(G)$ の部分彩色を無視して G を r-彩色したとき, 同じ色で塗られている頂点がすべて互いに 3 以上離れていれば, $d(S) \geq 12$ の仮定の下で染色数以外の余分な色は使わず, S の r-部分彩色を G の r-彩色に拡張できることを証明した.

また Brooks の定理を部分彩色拡張問題に拡張する研究も進められている. Brooks の定理によれば, わずかな例外を除くほぼすべてのグラフ G は $\Delta(G)$-彩色可能である. Axenovich [4] と Albertson et al. [5] は独立に, 最小次数 3 以上であり完全グラフでないグラフ G と $S \subset V(G)$ について, $d(S) \geq 8$ であれば S の $\Delta(G)$-部分彩色を G の $\Delta(G)$-彩色に拡張できることを証明している.

4. リスト彩色

グラフの彩色にはリスト彩色と呼ばれる概念もある. グラフ G の各頂点 v に v の彩色に使用してもよい色の集合 $L(v)$ を与える. われわれは $L(v)$ の中にある色だけを使ってグラフを彩色する. そのような彩色があれば, それを L-リスト彩色と呼び, G は L-リスト彩色可能であるという.

もしグラフ G のすべての頂点 v に同じ集合 $L(v) = \{1, 2, \ldots, k\}$ を与えれば, G の L-リスト彩色は G の k-彩色にほかならない. また $S \subset V(G)$ の頂点 u に色 $c(u)$ が与えられている部分彩色について, $L(v)$ を

$$L(v) = \begin{cases} \{c(v)\} & v \in S \text{ のとき} \\ \{1, 2, \ldots, k\} & v \notin S \text{ のとき} \end{cases}$$

とおけば, G の L-リスト彩色は S の部分彩色の k-彩色への拡張である. このようにリスト彩色は通常のグラフの彩色, 部分彩色の拡張を包含する幅広い概念である.

リスト彩色はその適用範囲の広さから多くの研究者の興味を引き, 盛んに研究されている. 一方通常の彩色で培われてきた手法の多くがリスト彩色では役に立たず, 研究にはかなりの困難を伴うことも多い.

5. まとめ

本稿では経営工学的な例から始めて, グラフの彩色を紹介した. また後半では比較的新しい話題である部分彩色の拡張問題を解説した. グラフの彩色に帰着される多くの問題について, 部分彩色の拡張は「新たなデータや制約条件の追加に伴い, 既存の解を破棄することなく拡張するだけで更新せよ」というアプローチに対応している. このような要請は現実問題によく現れるものであり, 部分彩色拡張問題は適用範囲の広い研究テーマである.

参考文献

[1] C. Thomassen, "Color-critical graphs on a fixed surface," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **70**, pp. 67–100, 1997.

[2] M. O. Albertson, "Yon can't paint yourself into a corner," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **73**, pp. 189–194, 1998.

[3] M. O. Albertson and E. H. Moore, "Extending graph colorings using no extra colors," *Discrete Mathematics*, **234**, pp. 125–132, 2001.

[4] M. Axenovich, "A note on graph coloring extensions and list-colorings," *Electronic Journal of Combinatorics*, **10**, #N1, 2003.

[5] M. O. Albertson, A. Kostochka and D. West, "Precoloring extensions of Brooks' theorem," *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, **18**, pp. 542–553, 2004.