

線形計画問題による Vizing 予想へのアプローチ

古谷 倫貴

Vizing 予想 (任意の二つのグラフ G, H のデカルト積 $G \oplus H$ の支配数は, G の支配数と H の支配数の積以上となる) は, グラフの支配数に関する最も有名な未解決予想である. この命題は, 支配数を実数上に拡張した断片的支配数に置き換えたものについては成り立つことが比較的簡単に示されるが, その容易さは問題を線形計画問題に帰着できることに由来する. 本稿ではその証明を通して, グラフ理論と最適化問題の関係を再確認したい.

キーワード: 支配数, 断片的支配数, Vizing 予想

1. はじめに

グラフ¹における支配数とは, グラフ全体を何頂点で“支配”することができるかの最小数のことである. より厳密には, 次のような定義によって与えられる. G をグラフとする. 各頂点 $x \in V(G)$ に対して, $N_G[x]$ によって x と隣接する頂点全体に x 自身を合わせた集合²を表す. $N_G[x]$ を x の閉近傍 (*closed neighborhood*) という. G の頂点部分集合 $S \subseteq V(G)$ が

任意の $x \in V(G)$ に対してある $y \in S$ が存在し,
 $x \in N_G[y]$ が成り立つ

という条件を満たすとき, S は G の支配集合 (*dominating set*) であるという. $V(G)$ は G の支配集合であるから, 特に任意のグラフ G は支配集合をもつことに注意する. G の支配集合の最小サイズを支配数 (*domination number*) といい, $\gamma(G)$ によって表す. たとえば, 図 1 におけるグラフ G について \circ で囲った 3 頂点からなる集合を S とすると, S は支配集合となっている. また, G には 2 頂点以下の支配集合が存在しないことも簡単に確認できるため, $\gamma(G) = |S| = 3$ が成り立つ.

グラフの頂点を“町 (または地域)”とみなし, 辺を“二つの町の間でラジオの電波が届く関係”とみなすと, 支配数の決定はラジオ塔の最適な配置に対応づけられる. これ以外にも, 支配数や支配集合はスケジューリングなど多くの実用的な問題に応用されるが [1, 2], その一方で, グラフの着色や超グラフの被覆に関係することも知られている. しかし本稿ではそのような応用的な側面には触れず, 支配数自身の問題に焦点を当て,

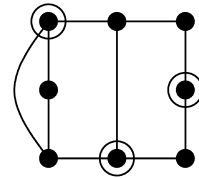


図 1 グラフ G の支配集合

最適化問題との数学的な関係を紹介したいと思う. なお, 本稿を執筆するにあたり, Imrich と Klavžar によるグラフの積に関する書籍 [3] が大変参考になった.

2. 支配集合と最適化問題

一般に, 与えられたグラフの支配数を決定する問題は NP-完全という数学的に難しい (または時間がかかる) 問題であることが知られている. 支配数の決定が難しいということは, それが次のようなある種の 0-1 計画問題に帰着できるということからもわかるであろう. G を位数 m のグラフとする³. $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ と書くとき, m 次正方形行列 $D(G) = (a_{ij}) \in \{0, 1\}^{m \times m}$ で⁴

$$a_{ij} = 1 \iff u_i \in N_G[u_j]$$

を満たすものを G の近傍行列 (*neighborhood matrix*) という. $u_i \in N_G[u_j]$ と $u_j \in N_G[u_i]$ は同値条件であるから, $D(G)$ は対称行列となる⁵. たとえば, 図 2 はグラフとその近傍行列を表す. このとき, G の支配数 $\gamma(G)$ は

¹ 本稿におけるグラフは, すべて有限な単純無向グラフを意味する.

² $N_G[x] = \{u \in V(G) : xu \in E(G)\} \cup \{x\}$ である.

³ グラフの頂点数, すなわち $|V(G)|$ を位数 (*order*) という.

⁴ 実際には近傍行列は頂点の順番にも依存して決まる行列であるが, ここでは $D(G)$ という表記を用いる.

⁵ 本稿の議論の中で近傍行列が対称行列であることは (明記することなく) 何度も用いるため注意されたい.

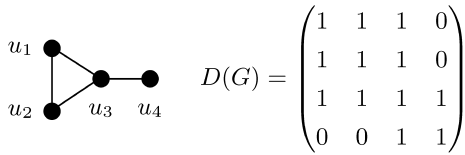


図2 グラフ G の近傍行列

$$\begin{aligned} \gamma(G) &= \min_{\mathbf{x}} \mathbf{1}_m^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to } \mathbf{x} &\in \{0, 1\}^m, D(G)\mathbf{x} \geq \mathbf{1}_m \end{aligned} \quad (1)$$

と表すことができる⁶. (1)において、制約条件が支配集合の定義に対応しており、目的関数によって支配集合の最小サイズを求めていることに注意されたい.

ここで、支配数の定義および(1)への変形に慣れるために、次の古典的な定理を(1)に従って証明してみよう⁷.

定理 1 (Ore [4]). G を、位数が m でどの頂点も他のある頂点と隣接するようなグラフとする. このとき $\gamma(G) \leq m/2$ が成り立つ⁸.

証明. $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ とし, $D(G) = (a_{ij})$ をこのラベル付けに対応する G の近傍行列とする⁹. $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ を,

$$\text{任意の } i, j \in I \ (i \neq j) \text{ に対して } a_{ij} = 0^{10}$$

という条件を満たすような最大の集合とする.

ここで m 次ベクトル $\mathbf{x} = (x_i)$ を

$$x_i = \begin{cases} 1 & (i \in I) \\ 0 & (i \notin I) \end{cases}$$

により定義する. まず, $D(G)\mathbf{x} \geq \mathbf{1}_m$ が成り立つことを示そう. 背理法により, $D(G)\mathbf{x} \not\geq \mathbf{1}_m$ であると仮定する. すると, ある $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ に対して

$\sum_{1 \leq j \leq m} a_{lj}x_j = 0$ が成り立つことになるが, これは任意の $j \in I$ に対して $a_{lj} = 0$ であることを意味する. このとき, $I' = I \cup \{l\}$ は任意の $i, j \in I'$ ($i \neq j$) に対して $a_{ij} = 0$ を満たすため, I の最大性に反する. したがって $D(G)\mathbf{x} \geq \mathbf{1}_m$ が成り立つ.

次に, m 次ベクトル $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_i)$ を

$$\bar{x}_i = \begin{cases} 0 & (i \in I) \\ 1 & (i \notin I) \end{cases}$$

により定義する. このとき, $D(G)\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{1}_m$ が成り立つことを示す. $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ を任意にとる. $l \notin I$ のとき, $a_{ll} = \bar{x}_l = 1$ であることから, $\sum_{1 \leq j \leq m} a_{lj}\bar{x}_j \geq a_{ll}\bar{x}_l = 1$ が成り立つ. $l \in I$ とする. このとき定理の仮定より, 頂点 u_l はある頂点 $u_{l'}$ と隣接する, すなわち $a_{ll'} = 1$ となる. $l \in I$ であることと I の定義より $l' \notin I$ を満たすため, $\sum_{1 \leq j \leq m} a_{lj}\bar{x}_j \geq a_{ll'}\bar{x}_{l'} = 1$ が成り立つ. したがって, $D(G)\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{1}_m$ となる.

以上より, \mathbf{x} と $\bar{\mathbf{x}}$ は共に(1)の実行可能解であるから

$$2\gamma(G) \leq \mathbf{1}_m^\top \mathbf{x} + \mathbf{1}_m^\top \bar{\mathbf{x}} = |I| + (m - |I|) = m$$

が成り立つ. \square

ここで支配集合を弱めた概念を定義する. G をグラフとする. 関数 $w : V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ が¹¹

$$\begin{aligned} &\text{任意の頂点 } x \in V(G) \text{ に対して} \\ &\sum_{y \in N_G[x]} w(y) \geq 1 \text{ が成り立つ} \end{aligned}$$

という条件を満たすとき, w は G の断片的支配関数 (fractional dominating function) であると言う. また, 断片的支配関数 w の重み $\sum_{x \in V(G)} w(x)$ の最小値を断片的支配数 (fractional domination number) と言い, $\gamma_f(G)$ によって表す. たとえば, 図3におけるグラフ G について, 各頂点に割り当てられている数字を関数値とみなすと, それは重み 2.5 の断片的支配関数となっている. 実際には, G には重み 2.5 未満の断片的支配関数は存在せず, したがって $\gamma_f(G) = 2.5$ が成り立つ.

支配数がある 0-1 計画問題の最適解として表されるのと同様に, G の断片的支配数 $\gamma_f(G)$ は近傍行列 $D(G)$ を用いて,

$$\begin{aligned} \gamma_f(G) &= \min_{\mathbf{x}} \mathbf{1}_m^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to } \mathbf{x} &\in (\mathbb{R}^+)^m, D(G)\mathbf{x} \geq \mathbf{1}_m \end{aligned} \quad (2)$$

¹¹ \mathbb{R}^+ によって非負の実数全体の集合を表す.

⁶ $\mathbf{1}_m$ によって, すべての成分が 1 である m 次ベクトルを表す. また, $(\cdot)^\top$ によって, 行列やベクトルの転置を表す.

⁷ ここで行う証明は, G の最大独立集合 S とその補集合 $V(G) - S$ が共に G の支配数になる, という証明の言い換えである.

⁸ 定理 1 の不等式は最善である. これは, 適当なグラフ H の各頂点 u に新たな頂点 v_u と辺 uv_u を加えることで得られるグラフ G が $\gamma(G) = |V(G)|/2$ を満たすことからわかる.

⁹ これ以降, 断りのない限り $D(G)$ は $\{u_1, \dots, u_m\}$ に対応する近傍行列とする.

¹⁰ たとえば図2のグラフにおいては, $I = 1, 4$ がこの性質を満たす.

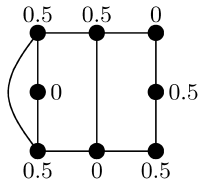


図3 グラフ G の断片的支配関数

と、ある線形計画問題の最適解として表されることがわかるであろう。ちなみに (1) の最適解 \mathbf{x} は (2) の実行可能解であるから、 $\gamma_f(G) \leq \mathbf{1}_m^\top \mathbf{x} = \gamma(G)$ が成り立つ。線形計画問題については、単体法を始めとしたさまざまな解法が知られており、最適解を求めることが簡単な問題である。したがって断片的支配数は、支配数と違って決定することが比較的簡単な問題に分類される。また、(1) の双対問題を考えて強双対定理を用いると

$$\begin{aligned} \gamma_f(G) &= \max_{\mathbf{x}} \mathbf{1}_m^\top \mathbf{x} \\ \text{subject to } & \mathbf{x} \in (\mathbb{R}^+)^m, D(G)\mathbf{x} \leq \mathbf{1}_m \end{aligned} \quad (3)$$

と表すこともできる。

3. Vizing 予想

本節では支配数とグラフの積に関する有名な予想を紹介する。

二つのグラフ G, H に対して、 $G \oplus H$ を

$$V(G \oplus H) = V(G) \times V(H)$$

と

$$\begin{aligned} E(G \oplus H) &= \{(u, v)(u', v') : u = u' \text{ かつ } vv' \in E(H), \\ &\quad \text{または } v = v' \text{ かつ } uu' \in E(G)\} \end{aligned}$$

によって定まるグラフとし、これを G と H のデカルト積 (Cartesian product) と言う。図4は、 P_2 と P_3 のデカルト積 $P_2 \oplus P_3$ を表す¹²。

Vizing は次のような予想を提案した。

予想 1 (Vizing [5]). 任意のグラフ G, H に対して、

$$\gamma(G \oplus H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$$

が成り立つ。

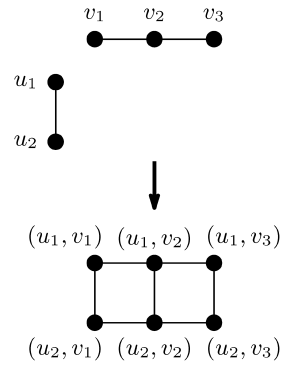


図4 デカルト積 $P_2 \oplus P_3$

Vizing の予想は、支配数が大きく、任意に指定された部分構造をもつような対称性の高いグラフが構成できることを主張している。これは支配数に関する研究において、何らかの具体例を発見するときに非常に役立つであろう。そのような動機の下でこの予想に対して数多くの研究が行われているが [6]、現状ではその完全解決には程遠い。たとえば、現在わかっている一般的な結果の中で最良なものは次のような不等式である。

定理 2 (Suen and Tarr [7]). 任意のグラフ G, H に対して、

$$\gamma(G \oplus H) \geq \gamma(G)\gamma(H)/2 + \min\{\gamma(G), \gamma(H)\}/2$$

が成り立つ。

予想 1 の難しさの原因は何であろうか。もし、グラフの支配数を決定する難しさに由来するのであれば、支配数を緩和した定義である断片的支配数について同様の不等式を示すことは簡単に行えるかもしれない。実際には次の定理が成り立つ。

定理 3 (Fisher et al. [8]). 任意のグラフ G, H に対して、

$$\gamma_f(G \oplus H) \geq \gamma_f(G)\gamma_f(H)$$

が成り立つ。

また、より予想 1 に近い形の定理として、次の定理も知られている。

¹² P_n によって、位数 n の道 (path) を表す。

定理 4 (Fisher [9]). 任意のグラフ G, H に対して,

$$\gamma(G \oplus H) \geq \gamma_f(G)\gamma_f(H)$$

が成り立つ.

これらの定理は (断片的) 支配数を最適化問題に置き換えることによって証明されたものであり, グラフの問題を最適化問題を經由して解決したよい例の一つであると考えられるため, 本稿の残りをを使ってその証明を紹介したい.

4. グラフの強直積と線形計画問題

定理 3 や定理 4 の証明の前に, グラフに関する新たな積を紹介しよう. 二つのグラフ G, H に対して, $G \cdot H$ を

$$V(G \cdot H) = V(G) \times V(H)$$

と

$$\begin{aligned} E(G \cdot H) &= \{(u, v)(u', v') : u = u' \text{ かつ } vv' \in E(H), \\ &\quad \text{または } v = v' \text{ かつ } uu' \in E(G), \\ &\quad \text{または } uu' \in E(G) \text{ かつ } vv' \in E(H)\} \end{aligned}$$

によって定まるグラフとし, これを G と H の強直積 (strong direct product) という. 図 5 は, P_2 と P_3 の強直積 $P_2 \cdot P_3$ を表す.

グラフの強直積の断片的支配数 $\gamma_f(G \cdot H)$ の値を, $D(G)$ と $D(H)$ を用いて表してみよう. 一般に, m 次正方行列 $A = (a_{ij})$ と n 次正方行列 $B = (b_{ij})$ のクロネッカー積を $A \otimes B$ によって表す. すなわち, $A \otimes B$ は

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{pmatrix}$$

によって表される mn 次正方行列である.

ここで改めてグラフ G, H , および $G \cdot H$ の近傍行列を明確にしておく. これ以降, G の位数を m , H の位数を n とし, $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ と表す. また, G, H の近傍行列 $D(G) = (a_{ij})$, $D(H) = (b_{ij})$ は, それぞれこのラベル付けに対応しているものを考える. さらに, $G \cdot H$ の頂点 (u_i, v_j) は, (i, j) の辞書式順序に従って, すなわち $(u_1, v_1), (u_1, v_2), \dots, (u_1, v_n), (u_2, v_1), (u_2, v_2), \dots$

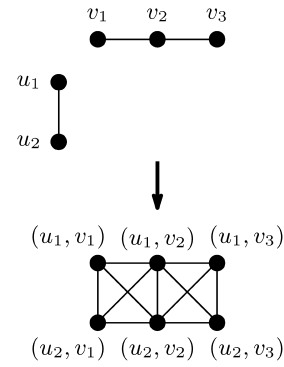


図 5 強直積 $P_2 \cdot P_3$

の順で並んでいるとする. このとき, $D(G \cdot H)$ をこれに対応する $G \cdot H$ の近傍行列とする.

次の補題は, クロネッカー積の定義から直ちに得られる.

補題 1. 任意のグラフ G, H に対して

$$D(G \cdot H) = D(G) \otimes D(H)$$

が成り立つ.

また, 次の補題も簡単に示すことができる¹³.

補題 2. G, H を任意のグラフとし, $k \geq 0$ を実数とする. このとき,

$$\mathbf{1}_{mn}^\top \mathbf{x} = k \quad \text{かつ} \quad D(G \cdot H) \mathbf{x} \geq \mathbf{1}_{mn}$$

を満たすベクトル $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^+)^{mn}$ が存在するための必要十分条件は,

$$\mathbf{1}_m^\top Z \mathbf{1}_n = k \quad \text{かつ} \quad D(G) Z D(H) \geq \mathbf{1}_m \mathbf{1}_n^\top$$

を満たす行列 $Z \in (\mathbb{R}^+)^{m \times n}$ が存在することである.

証明. 任意の行列 $Z = (z_{ij}) \in (\mathbb{R}^+)^{m \times n}$ に対して, $D(G) Z D(H)$ の第 (i, j) 成分は

$$\begin{aligned} (D(G) Z D(H))_{ij} &= \sum_{s=1}^m \left(\sum_{t=1}^n a_{is} z_{st} b_{tj} \right) \\ &= \sum_{s=1}^m a_{is} \left(\sum_{t=1}^n b_{jt} z_{st} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

と表される.

¹³補題 2 は, ある mn 個の非負実数列に関する条件を, mn 次ベクトル \mathbf{x} と, n 個ごとに区切って行ベクトルとした $m \times n$ 行列 Z の 2 種類で表現できることを意味している.

まず, $D(G \cdot H)\mathbf{x} \geq \mathbf{1}_{mn}$ を満たすベクトル $\mathbf{x} = (x_i) \in (\mathbb{R}^+)^{mn}$ が存在すると仮定する. すると補題 1 より, $(D(G) \otimes D(H))\mathbf{x} \geq \mathbf{1}_{mn}$ が成り立つ. このとき, 行列

$$Z = (z_{ij}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(m-1)n+1} & x_{(m-1)n+2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

を定めると, (4) より $D(G)ZD(H)$ の第 (i, j) 成分は

$$\begin{aligned} (D(G)ZD(H))_{ij} &= \sum_{s=1}^m a_{is} \left(\sum_{t=1}^n b_{jt} z_{st} \right) \\ &= \sum_{s=1}^m a_{is} \left(\sum_{t=1}^n b_{jt} x_{(s-1)n+t} \right) \end{aligned}$$

となるが, これはベクトル $(D(G) \otimes D(H))\mathbf{x}$ の第 $(i-1)n+j$ 成分と一致するため, 1 以上の実数となる. したがって, $D(G)ZD(H) \geq \mathbf{1}_m \mathbf{1}_n^\top$ が得られる.

逆に, $D(G)ZD(H) \geq \mathbf{1}_m \mathbf{1}_n^\top$ を満たす行列 $Z = (z_{ij}) \in (\mathbb{R}^+)^{m \times n}$ が存在すると仮定する. このとき, ベクトル

$$\mathbf{x} = (x_i) = (z_{11} \ z_{12} \cdots z_{1n} \ z_{21} \cdots z_{2n} \cdots z_{mn})^\top$$

を定める. ここで $l \in \{1, \dots, mn\}$ を任意にとると, $l = (i-1)n+j$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) と一意的に表すことができる. このときベクトル $(D(G) \otimes D(H))\mathbf{x}$ の第 l 成分は

$$\begin{aligned} ((D(G) \otimes D(H))\mathbf{x})_l &= \sum_{s=1}^m a_{is} \left(\sum_{t=1}^n b_{jt} x_{(s-1)n+t} \right) \\ &= \sum_{s=1}^m a_{is} \left(\sum_{t=1}^n b_{jt} z_{st} \right) \end{aligned}$$

となるが, (4) よりこれは行列 $D(G)ZD(H)$ の第 (i, j) 成分と一致するため, 1 以上の実数となる. したがって補題 1 より, $D(G \cdot H)\mathbf{x} = (D(G) \otimes D(H))\mathbf{x} \geq \mathbf{1}_{mn}$ が得られる. \square

補題 2 と (2) を用いると, $\gamma_f(G \cdot H)$ の値は

$$\begin{aligned} \gamma_f(G \cdot H) &= \min_Z \mathbf{1}_m^\top Z \mathbf{1}_n \\ \text{subject to } Z &\in (\mathbb{R}^+)^{m \times n}, D(G)ZD(H) \geq \mathbf{1}_m \mathbf{1}_n^\top \end{aligned} \quad (5)$$

と表される. また, この双対問題を考えることで

$$\begin{aligned} \gamma_f(G \cdot H) &= \max_Z \mathbf{1}_m^\top Z \mathbf{1}_n \\ \text{subject to } Z &\in (\mathbb{R}^+)^{m \times n}, D(G)ZD(H) \leq \mathbf{1}_m \mathbf{1}_n^\top \end{aligned} \quad (6)$$

も成り立つことがわかるだろう.

また, 同様の議論を行うことで, グラフの強直積の支配数を次のような 0-1 計画問題の最適解の形で表すことができる.

$$\begin{aligned} \gamma(G \cdot H) &= \min_Z \mathbf{1}_m^\top Z \mathbf{1}_n \\ \text{subject to } Z &\in \{0, 1\}^{m \times n}, D(G)ZD(H) \geq \mathbf{1}_m \mathbf{1}_n^\top \end{aligned} \quad (7)$$

5. 定理 3 の証明

まずは次の主張を示す.

主張 1. 任意のグラフ G, H に対して,

$$\gamma_f(G \cdot H) = \gamma_f(G)\gamma_f(H)$$

が成り立つ.

証明. ベクトル $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^+)^m$ とベクトル $\mathbf{y} \in (\mathbb{R}^+)^n$ を, それぞれ G と H に関する (2) の最適解とする. すると, $D(G)\mathbf{x}\mathbf{y}^\top D(H) = (D(G)\mathbf{x})(D(H)\mathbf{y})^\top \geq \mathbf{1}_m \mathbf{1}_n^\top$ が成り立つ. $\mathbf{x}\mathbf{y}^\top \in (\mathbb{R}^+)^{m \times n}$ であるから, この式は $\mathbf{x}\mathbf{y}^\top$ が (5) における実行可能解であることを意味する. したがって,

$$\begin{aligned} \gamma_f(G \cdot H) &\leq \mathbf{1}_m^\top \mathbf{x}\mathbf{y}^\top \mathbf{1}_n \\ &= (\mathbf{1}_m^\top \mathbf{x})(\mathbf{1}_n^\top \mathbf{y}) \\ &= \gamma_f(G)\gamma_f(H) \end{aligned}$$

が成り立つ.

一方で, ベクトル $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^+)^m$ とベクトル $\mathbf{y} \in (\mathbb{R}^+)^n$ を, それぞれ G と H に関する (3) の最適解とすると, 同様の議論により $D(G)\mathbf{x}\mathbf{y}^\top D(H) \leq \mathbf{1}_m \mathbf{1}_n^\top$ が得られる. よって, $\mathbf{x}\mathbf{y}^\top$ は (6) における実行可能解となり,

$$\begin{aligned} \gamma_f(G \cdot H) &\geq \mathbf{1}_m^\top \mathbf{x}\mathbf{y}^\top \mathbf{1}_n \\ &= (\mathbf{1}_m^\top \mathbf{x})(\mathbf{1}_n^\top \mathbf{y}) \\ &= \gamma_f(G)\gamma_f(H) \end{aligned}$$

が成り立つ. \square

グラフ G, H のデカルト積と強直積の定義より, $G \oplus H$ は $G \cdot H$ の全域部分グラフとなる¹⁴. ここで一般に, G_1 が G_2 の全域部分グラフであれば, G_1 の断片的支配関数は G_2 の断片的支配関数でもあるため, $\gamma_f(G_1) \geq \gamma_f(G_2)$ が成り立つ. この事実と主張 1 より, $\gamma_f(G \oplus H) \geq \gamma_f(G \cdot H) = \gamma_f(G)\gamma_f(H)$ が成り立つ.

6. 定理 4 の証明

任意のグラフ G, H について, $G \oplus H$ の支配集合は $G \cdot H$ の支配集合であるから, $\gamma(G \oplus H) \geq \gamma(G \cdot H)$ が成り立つことがわかる. したがって, 定理 4 を示すには次の主張を証明すれば十分である.

主張 2. 任意のグラフ G, H に対して,

$$\gamma(G \cdot H) \geq \gamma_f(G)\gamma(H)$$

が成り立つ.

証明. $Z \in \{0, 1\}^{m \times n}$ を (7) の最適解とする. このとき, (行列 A の第 i 行を A_i と表すことにすると)

$$(D(G)Z)_i D(H) = (D(G)ZD(H))_i \geq \mathbf{1}_n^\top$$

が成り立つ. この不等式の両辺の転置を考えると

$$D(H)((D(G)Z)_i)^\top \geq \mathbf{1}_n$$

となる. したがって, $((D(G)Z)_i)^\top$ は H に関しての (1) における実行可能解である. よって,

$$\begin{aligned} \gamma(H) &\leq \mathbf{1}_n^\top ((D(G)Z)_i)^\top \\ &= (D(G)Z)_i \mathbf{1}_n \end{aligned}$$

が成り立ち, これらをまとめて

$$\gamma(H)\mathbf{1}_m \leq D(G)Z\mathbf{1}_n$$

すなわち

$$D(G) \left(\frac{1}{\gamma(H)} Z\mathbf{1}_n \right) \geq \mathbf{1}_m$$

¹⁴ G_1 が G_2 の全域部分グラフ (*spanning subgraph*) であるとは, $V(G_1) = V(G_2)$ かつ $E(G_1) \subseteq E(G_2)$ となることである.

¹⁵Vizing 予想を言い換えれば, 任意のグラフは \mathcal{X} に属する, となる.

¹⁶たとえば, 完全グラフ K_n などは $\gamma_f(K_n) = \gamma(K_n)$ を満たす. また, 定理 1 の最善性を示す例 (脚注 8 参照) も $\gamma_f(G) = \gamma(G)$ を満たす.

が導かれる. すなわち, $(1/\gamma(H))Z\mathbf{1}_n$ は G に関しての (2) における実行可能解である. 以上より,

$$\begin{aligned} \gamma_f(G) &\leq \mathbf{1}_m^\top \left(\frac{1}{\gamma(H)} Z\mathbf{1}_n \right) \\ &= \frac{1}{\gamma(H)} (\mathbf{1}_m^\top Z\mathbf{1}_n) \\ &= \frac{1}{\gamma(H)} \gamma(G \cdot H) \end{aligned}$$

が成り立つ. \square

7. おわりに

本稿では, 支配数と Vizing 予想を題材として, グラフ理論上の問題を最適化問題に帰着する流れを確認した. 本稿では詳しく扱わなかったが, 「任意のグラフ H に対して $\gamma(G \oplus H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$ が成り立つ」ようなグラフ G のクラスを \mathcal{X} によって表し, \mathcal{X} に属するグラフを発見するという研究も盛んに行われている¹⁵. 定理 4 から, $\gamma_f(G) = \gamma(G)$ を満たすグラフ G はクラス \mathcal{X} に属することになる¹⁶. よって, たとえば断片的支配数よりも支配数に近い支配数的不変量 μ を定義し $\gamma(G \oplus H) \geq \mu(G)\gamma(H)$ を示すことができれば, より多くのクラス \mathcal{X} に属するグラフを発見できるようになる. このような問題を最適化問題の観点から挑戦してみることも面白いかもしれない.

もちろんここで扱った証明は支配数に特化したものであり, 多くのグラフ理論の問題がほかの形で最適化問題に翻訳され解かれている. 本稿を通して, 最適化的手法でグラフ理論の問題を解くことに興味をもった読者がいれば幸いである.

参考文献

- [1] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, 1998.
- [2] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, *Domination in Graphs: Advanced Topics*, Marcel Dekker, 1998.
- [3] W. Imrich and S. Klavžar, *Product graphs. Structure and recognition*, Wiley-Interscience, 2000.
- [4] O. Ore, *Theory of Graphs*, Vol. 38, American Mathematical Society Colloquium Publications, 1962.
- [5] V. G. Vizing, “Some unsolved problems in graph theory,” *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **23**, pp. 117–134, 1968.
- [6] B. Brešar, P. Dorbec, W. Goddard, B. L. Hartnell, M. A. Henning, S. Klavžar and D. F. Rall, “Vizing’s conjecture: A survey and recent results,” *Journal of Graph Theory*, **69**, pp. 46–76, 2012.
- [7] S. Suen and J. Tarr, “An improved inequality re-

lated to Vizing's conjecture," *The Electronic Journal of Combinatorics*, **19**, #P1.8, 2012.

[8] D. C. Fisher, J. Ryan, G. Domke and A. Majumdar, "Fractional domination of strong direct products,"

Discrete Applied Mathematics, **50**, pp. 89–91, 1994.

[9] D. C. Fisher, "Domination, fractional domination, 2-packing, and graph products," *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **7**, pp. 493–498, 1994.