ポートフォリオ最適化入門

枇々木　規雄

本稿ではポートフォリオ理論の基本的な考え方とさまざまな最適化モデルを解説する．まずはじめに，ポートフォリオ最適化に必要な基礎知識およびリスクを低減できる分散投資効果について説明する．次に，基本モデルである平均・分散モデルを紹介する．さらに，下方リスク尺度として下方部分積率，VaR（バリュー・アット・リスク），CVaR（条件付 VaR）を取り上げ，平均・下方リスクモデルの定式化の方法を解説する．

キーワード：リスク分散効果，平均・分散モデル，下方リスクモデル

1. はじめに

資産投資によって資金を増やしたいとき，その運用結果を測る尺度は収益率である．収益率は元本に対する資金の増加分（利益）もしくは減少分（損失）の割合である．銀行預金は銀行が倒産しない限り，資金を預けた時点で受取金額が確定する無リスク資産であり，このときの収益率は金利である．一方，株式は将来の受取金額が確定していないリスク資産であり，収益率も不確実である．このようなリスク資産へ投資を行うとき，リスクを減少させるためにはポートフォリオ (portfolio) を組み，複数資産へ分散投資をすることが推奨される．その理由はある一つの資産に資金のすべてを投資すると，その資産価値が大きく下がった場合，大きな損失を被るからである．複数資産へ分散投資をすれば，たとえ一つの資産価値が下がってもほかの資産でカバーできる可能性がある．分散投資をしても，すべての資産価値が下がる可能性もあるが，その確率は一つの資産価値が大きく下がる確率よりも小さくなる．

資産投資を行う場合，できるだけ安定した収益を得たい（収益率がばらつくリスクや損失を被るリスクを減らしたい）と考える一方で，平均的に収益は高く（リターンは高く）したいと思うだろう．しかし，一般的にリスクが最小で平均収益率が最大となるポートフォリオを得ることはできない．リターンとリスクの間にはトレードオフの関係があり，それを考慮して最適なポートフォリオを選択する必要がある．そのために用いられるのが数理計画モデルであり，ポートフォリオ最適化モデルと呼ばれる．本稿では，まずはじめに，ポートフォリオ収益率やその平均と分散を定義し，その基本モデルである平均・分散モデルを紹介する．さらに，分散の代わりに下方リスク尺度を用いたモデルの定式化の方法も解説する．

2. 基本的な考え方

2.1 収益率の定義

現時点（0 時点）で投資を行い，1 時点で運用結果を評価するとしよう．ある資産の 0 時点の価格を P_0，1 時点の価格を P_1 とすると，その資産の収益率 r は

$$r = \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{P_1}{P_0} - 1 \tag{1}$$

と定義される．たとえば，$P_0 = 100$ 円，$P_1 = 120$ 円であれば，$r = 0.2$ である．収益率は元本に対する割合を表すので，各資産への投資金額に収益率を掛けることによって損益（資金の増減分）を計算できる．

0 時点（現在）の価格は確定的にわかるが，1 時点（将来）の価格は不確実である．そのため，1 時点の価格および収益率を確率変数として取り扱い，投資評価をする必要がある．収益率の記号には確率変数を表すチルダを付けて，以降 $\tilde{r}$ と記述する．

2.2 ポートフォリオ収益率

n 個の資産でポートフォリオを構築しよう．資産 i への投資金額を X_i，その投資金額合計を X とすると，

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X \tag{2}$$

である．資産 i への投資比率を用いて書き直すと，$x_i = \frac{X_i}{X}$ と表せるので，(2) 式の両辺を X で割ると，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{3}$$

ひびき　のりお
慶應義塾大学理工学部
〒 223–8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3–14–1
hibiki@ae.keio.ac.jp

となる．これはポートフォリオ最適化モデルで必ず現れる投資比率の合計が1となることを表す式である．ポートフォリオの収益率を $\tilde{r}_p$，資産 i の収益率を $\tilde{r}_i$ とすると，ポートフォリオの損益は各資産の損益の合計なので

$$\tilde{r}_p X = \sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_i X_i \tag{4}$$

となる．両辺を X で割ると，

$$\tilde{r}_p = \sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_i x_i \tag{5}$$

となる．したがって，ポートフォリオの収益率は各資産の収益率の投資比率による加重和として計算される．ポートフォリオの損益はポートフォリオ収益率を使って (4) 式から計算できるので，投資評価を考えるときにはどのような投資金額に対しても，(5) 式のように収益率と投資比率だけで考えてよいことがわかる．

2.3　モデル化の概要

0 時点で投資を行い，1 時点の運用結果で評価するモデルは 1 期間モデルと呼ばれる．1 時点の運用結果は不確実であり，図 1 に示すように収益率分布として記述される．

資産ごとに収益率分布は想定できるが，ポートフォリオの収益率分布はポートフォリオの構成割合に依存する．したがって，収益率分布が投資家にとって好ましい形になるようにポートフォリオを決定することによって，リスクとリターンをコントロールできる．ただし，収益率分布を直接取り扱うことは難しいので，その特徴を表す代表的な評価尺度としてリターン尺度とリスク尺度を定義し，投資評価をする．一般的にリターン尺度には収益率の期待値（期待収益率），リスク尺度には収益率の分散（または標準偏差）が用いられる．

ポートフォリオの収益率の期待値と分散を計算しよう．資産 i の期待収益率を $\overline{r}_i$ とすると，ポートフォリオの期待収益率は

$$\overline{r}_p = \mathrm{E}(\tilde{r}_p) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{r}_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i x_i \tag{6}$$

となる．各資産の期待収益率の投資比率による加重和として計算されることがわかる．一方，資産 i の収益率の標準偏差を σ_i，資産 i と資産 j の収益率の共分散を σ_{ij} とすると，ポートフォリオ収益率の分散は (7) 式で計算される．

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \mathrm{E}\left[(\tilde{r}_p - \overline{r}_p)^2\right] = \mathrm{E}\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} (\tilde{r}_i - \overline{r}_i)\, x_i\right\}^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left\{\sum_{i=1}^{n} (\tilde{r}_i - \overline{r}_i) x_i\right\}\left\{\sum_{j=1}^{n} (\tilde{r}_j - \overline{r}_j) x_j\right\}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\Big[(\tilde{r}_i - \overline{r}_i)\,(\tilde{r}_j - \overline{r}_j)\Big] x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j
\end{aligned} \tag{7}$$

資産間の共分散にそれぞれの投資比率を掛け合わせて合計した値として計算されることがわかる．共分散は二つの変数の関連の強さを反映する尺度であり，各資産の変動の関係が分散に影響を与えることがわかる．直感的には共分散の小さい資産の組み合わせで投資をすると分散を小さくすることに効果があるといえる．

2.4　分散投資はなぜリスクを小さくできるのか?

ポートフォリオを組むことによる分散投資の効果を簡単な数値例を用いて示そう．共分散は相関係数 ρ_{ij} を用いて，$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ と表せるので，(7) 式よりポートフォリオ収益率の分散 σ_p^2 は

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j x_i x_j \tag{8}$$

と計算される．簡単のため，等比率ポートフォリオ ($x_i = \frac{1}{n}$) を想定し，各資産の収益率の標準偏差はすべて同じ ($\sigma_i = \sigma$)，相関係数もすべて同じ ($\rho_{ij} = 1\,(i = j)$, $\rho_{ij} = \rho\,(i \neq j)$) とする．(8) 式に代入すると，

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\rho\sigma^2}{n^2} = \left(\frac{1-\rho}{n} + \rho\right)\sigma^2 \tag{9}$$

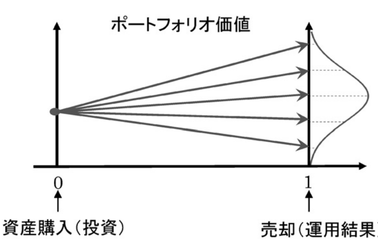

図 1　1 期間モデル

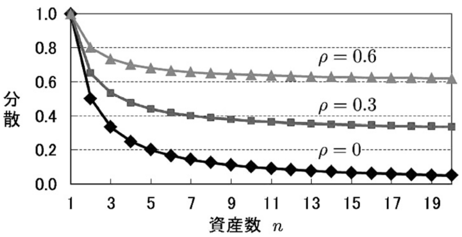

図 2 分散投資効果

が得られる．(9) 式から，資産数 n が大きくなる（分散投資をする）と分散は小さくなり，$\rho\sigma^2$ に近づいていく．無相関 $(\rho = 0)$ で資産数が無限大 $(n \to \infty)$ になると分散は 0 になる．$\sigma = 1$ として，いくつかの相関係数に対する分散投資効果を図 2 に示す．

分散投資をする，すなわち投資資産を分散化 (diversification) することによって，収益率の分散 (variance) を小さくすることができる．数値例では等比率ポートフォリオを想定したが，最適化モデルを用いれば同じ期待収益率でもより小さい分散のポートフォリオの構成比率をうまく見つけることができる．

3. 平均・分散モデル

前述したように，リターン尺度とリスク尺度を定義し，それらのトレードオフ関係を利用して問題を解く．リターン尺度としてポートフォリオの期待収益率，リスク尺度として収益率の分散を用いて，ポートフォリオ選択を行うモデルを平均・分散モデルと呼ぶ．

3.1 定式化

ポートフォリオ最適化問題は「期待収益率 $\overline{r}_p$ が投資家の要求する期待収益率 r_E 以上であるという制約の下で，リスク（分散）σ_p^2 を最小化する資産 i への投資比率 $x_i\,(i = 1, \ldots, n)$ を求める」2 次計画問題として定式化される[1]．

$$\text{最小化} \quad \sigma_p^2 \tag{10}$$

$$\text{制約条件} \quad \overline{r}_p \geq r_E \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{12}$$

$$x_i \geq 0,\ (i = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

ここで，(12) 式は投資比率の合計が 1 になることを表す制約式（(3) 式と同じ），(13) 式は空売りを禁止する場合の制約式である．期待収益率を考慮せずに，分散を最小にするポートフォリオは「最小分散ポートフォリオ」と呼ばれ，(11) 式を除いて問題を解くことによって求められる．その期待収益率を $\overline{r}_p^{min}$ としよう．r_E を $\overline{r}_p^{min}$ 以上に設定すると，最適ポートフォリオの期待収益率 $\overline{r}_p^*$ は r_E と一致するので，(11) 式は $\overline{r}_p = r_E$ としても等価な問題となる．r_E を $\overline{r}_p^{min}$ からパラメトリックに変化させ，収益率の期待値と標準偏差の関係を描いた曲線を効率的フロンティアと呼ぶ．

3.2 数値例

具体的にイメージするために，簡単な計算例を示そう．表 1 に 4 資産の場合のモデルのパラメータを示す．共分散は相関係数と標準偏差を用いて計算する．

図 3 に効率的フロンティアと三つのポートフォリオに対する投資比率を示す．最小分散ポートフォリオ (P1) の収益率の期待値は 5.94%，標準偏差は 2.37% である．P2，P3 はそれぞれの収益率の期待値と標準偏差が $(\overline{r}_p, \sigma_p) = (6.8\%, 6.37\%), (7.8\%, 19.31\%)$ となるポートフォリオである．P1 は 4 資産に分散投資したローリスク・ローリターンのポートフォリオであり，P3 は 2 資産のみへの投資で収益率の期待値も標準偏差も高い資産 4 に 80%投資した，ハイリスク・ハイリターンを目指すポートフォリオである．

平均・分散モデルは暗黙のうちにポートフォリオの

表 1 基本統計量

	資産 1	資産 2	資産 3	資産 4
期待収益率 $\overline{r}_i$	5%	6%	7%	8%
標準偏差 σ_i	10%	20%	15%	25%
相関係数 ρ_{ij}	資産 1	資産 2	資産 3	資産 4
資産 1	1.0	−0.7	0.1	−0.4
資産 2	−0.7	1.0	−0.5	0.2
資産 3	0.1	−0.5	1.0	−0.3
資産 4	−0.4	0.2	−0.3	1.0

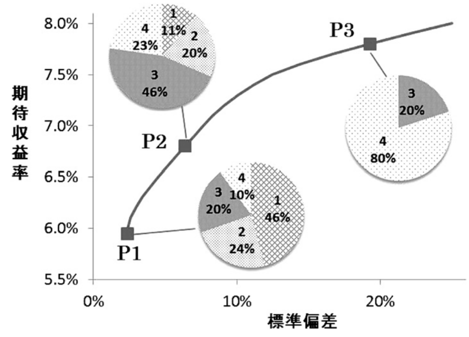

図 3 効率的フロンティア

[1] 運用実務でもよく使われているが，その際には上限制約や売買回転率制約などの実務上のさまざまな制約を追加する必要がある．詳しい定式化は枇々木と田辺 [1] を参照されたい．

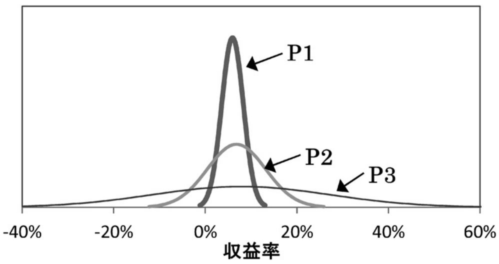

図 4　収益率分布

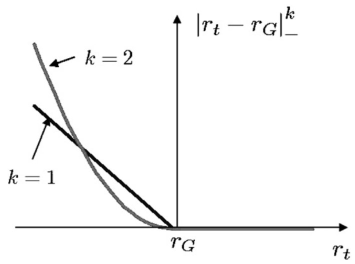

図 5　下方部分積率

収益率が正規分布に従うことを想定している．それは平均と標準偏差が決まれば正規分布の形が一意に決められるからである．図 3 の三つのポートフォリオに対する収益率分布を図 4 に示す．

リスク（標準偏差）が小さい P1 に比べて，リスクの大きい P3 の収益率がばらつきやすいことがわかる．収益率が 0%を下回る確率も P1 は 0.6%であるのに対し，P2 は 14.3%，P3 は 34.3%と徐々に大きくなる．

4.　平均・下方リスクモデル

収益率が正規分布に従わない場合，分散（標準偏差）の代わりに分布を仮定しないリスク尺度を使う必要がある．ここでは収益率の下方部分に注目した下方リスク尺度である下方部分積率 (LPM: Lower Partial Moment)，VaR（Value at Risk：バリュー・アット・リスク），CVaR（Conditional VaR：条件付 VaR）を取り上げ，それらを用いた定式化の方法を示す[2]．

これらのリスク尺度を用いる場合，各資産の収益率分布の同時分布を離散的なシナリオデータで表現することによって，問題を解くのが一般的である．シナリオデータとは，シナリオ t における収益率データのことである．具体的には，たとえばモンテカルロ法を用いてシナリオデータを生成できる．シナリオ t の資産 i の収益率を r_{it} とすると，シナリオ t のポートフォリオの収益率は

$$r_t = \sum_{i=1}^{n} r_{it} x_i, \ (t = 1, \ldots, T) \tag{14}$$

と記述できる．ここで，T はシナリオ数である．各シナリオの資産ごとの収益率はパラメータで与えられるのに対し，ポートフォリオの収益率は投資比率に依存して決定される．ただし，ポートフォリオも一つにまとめられた資産であると考えて，リスク尺度を定義する．

[2] 詳細は省略するが，収益率が正規分布に従う場合，これらのリスク尺度は収益率の期待値と標準偏差を用いて記述できるので，平均・分散モデルで問題を解けばよい．

4.1　平均・下方部分積率モデル

確定給付型の企業年金基金や生命保険会社にとっての資産運用のリスクは，受給者に支払う給付や保険金を計算するのに用いる予定利率を収益率が下回ることである．このような場合，リスク尺度として予定利率を目標収益率とする下方部分積率を使うことができる．

下方部分積率は目標収益率 r_G を下回る値（偏差）のべき乗の平均値であり，(15) 式により定義される．

$$\mathrm{LPM}_k(r_G) \equiv \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} |r_t - r_G|_-^k \tag{15}$$

ここで，$|a|_- = \max\{-a, 0\}$ である．また，k はリスク選好の度合いを表し，偏差が大きくなるほど，相対的にリスクを大きく評価するパラメータである．$|r_t - r_G|_-^k$ は図 5 で表すことができる．

偏差を表す変数として d_t を用いると，

$$|r_t - r_G|_- = \min\{d_t \mid r_t + d_t \geq r_G,\ d_t \geq 0\} \quad (t = 1, \ldots, T) \tag{16}$$

と表せる．$r_t \geq r_G$ の場合，$d_t \geq 0$ を満たせばよいが，d_t を最小化するので，$d_t = 0$ となる．一方，$r_t < r_G$ の場合，$d_t \geq r_G - r_t$ を満たす必要があるが，d_t を最小化するため，$d_t = r_G - r_t$ となる．制約式と偏差の最小化の組み合わせによって，(16) 式の区分線形関数を「うまく」表すことができる．リスク尺度として次数 k の下方部分積率 $\mathrm{LPM}_k(r_G)$ を用いる場合のポートフォリオ最適化問題は次のように定式化できる．

$$\text{最小化} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (d_t)^k \tag{17}$$

$$\text{制約条件} \quad \sum_{i=1}^{n} r_{it} x_i + d_t \geq r_G;\ d_t \geq 0 \quad (t = 1, \ldots, T) \tag{18}$$

(11)〜(13) 式

$k=1$ ならば線形計画問題，$k=2$ ならば 2 次計画問題，$k \geq 3$ ならば非線形凸計画問題となる．

4.2　平均・VaR モデル

VaR は「確率水準」を明示的にパラメータとして用いたわかりやすいリスク尺度で，金融機関のリスク管理のために用いられている．VaR は確率水準 β（例：$\beta=0.95$）で発生する最大損失（パーセント点）を表し，α_β と記述することにしよう．VaR は損失の大きさを表すので，収益率として記述する場合には VaR にマイナスを付ける．最適化問題を記述するために，シナリオ t においてポートフォリオ収益率が $-$VaR を下回れば 1，上回れば 0 を表すように 0-1 変数 z_t を導入する．この z_t の合計をシナリオ数 T で割れば，$-$VaR を下回る確率が計算される．そして，その確率が $1-\beta$ 以下になるような最小の VaR を求める．そのために，制約空間

$$Z_t=\{z_t \in \{0,1\} \mid r_t + M \cdot z_t \geq -\alpha_\beta\} \quad (t=1,\ldots,T) \tag{19}$$

を設定する．ここで，M は非常に大きな数字とする．$r_t < -\alpha_\beta$ ならば，$z_t=1$ のときのみ，(19) 式が満たされる．一方，$r_t \geq -\alpha_\beta$ ならば，z_t は 0 でも 1 でも (19) 式を満たすが，意味としては $z_t=0$ でなければならないので，z_t を小さくする必要がある．したがって，r_t が $-\alpha_\beta$ を下回る確率は z_t の合計を T で割った値になるので

$$\Pr(r_t < -\alpha_\beta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \min\{z_t \mid z_t \in Z_t\} \tag{20}$$

と記述できる．目的関数の VaR に直接的には z_t は含まれないが，z_t の合計が $(1-\beta)T$ 以下であるという制約の下で α_β を小さくするためには z_t を小さくしたほうがよいので，(22) 式のように min は不要になる．平均・VaR モデルは次のように定式化できる．

$$\text{最小化} \quad \alpha_\beta \tag{21}$$

$$\text{制約条件} \quad \sum_{t=1}^{T} z_t \leq (1-\beta)T \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_{it}x_i + \alpha_\beta + M \cdot z_t \geq 0;\ z_t \in \{0,1\} \quad (t=1,\ldots,T) \tag{23}$$

(11)〜(13) 式

ただし，定式化はできるものの 0-1 変数が T 個必要になる．モンテカルロ・シミュレーションでシナリオを生成する場合，T は大きな数値になるため，上記の定式化は実質的に問題を解くことが難しい．したがって，この定式化で問題を解く場合，注意が必要である．

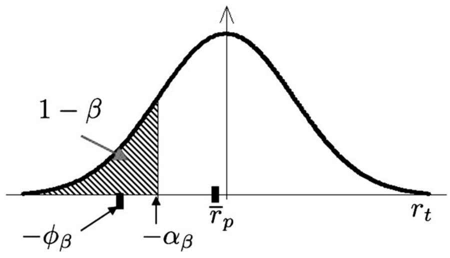

図 6　VaR と CVaR

4.3　平均・CVaR モデル

VaR はその値を上回る大きな損失と小さな損失を区別できないため，直接的に VaR を上回る損失の分布を評価できない．これはリーマンショック後の株式市場のような極端に大きな株価の下落を評価する場合（収益率分布の裾が長い場合），大きな欠点となる．VaR と同様に確率水準を明示的に取り扱いつつ，VaR を上回る損失も評価できる尺度として，CVaR を用いることができる．国際的な金融規制であるバーゼル III でも期待ショートフォール（CVaR の別称）に基づき必要な自己資本額を計算することが提案されている．確率水準 β の CVaR はポートフォリオ収益率の損失が α_β (VaR) を上回る場合の損失の条件付期待値（ポートフォリオ収益率が $-\alpha_\beta$ を下回るときの平均損失）を表し，(24) 式で定義される．

$$\phi_\beta \equiv \alpha_\beta + \frac{1}{(1-\beta)T}\sum_{t=1}^{T} |r_t + \alpha_\beta|_- \tag{24}$$

第 2 項の $|\cdot|_-$ 部分は (16) 式の r_G の代わりに $-\alpha_\beta$ と置くことによって，同様に求めることができる．横軸を収益率として VaR と CVaR の例を図 6 に示す．CVaR も損失の大きさを表すので，VaR と同様にマイナスを付けて取り扱う．

$-\alpha_\beta$ を下回る偏差を表す変数を u_t とすると，平均・CVaR モデルは次のように定式化できる．

$$\text{最小化} \quad \alpha_\beta + \frac{1}{(1-\beta)T}\sum_{t=1}^{T} u_t \tag{25}$$

$$\text{制約条件} \quad \sum_{i=1}^{n} r_{it}x_i + \alpha_\beta + u_t \geq 0;\ u_t \geq 0 \quad (t=1,\ldots,T) \tag{26}$$

(11)〜(13) 式，（α_β は無制約）

VaR とは異なり CVaR は凸性を満たすので最適化が容易であり，線形計画問題として定式化できる．

5. おわりに

ポートフォリオ理論と投資分析の代表的な教科書は Elton et al. [2] の *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis* である．この本は 1981 年に初版が出て以来，改訂を重ね，2014 年に第 9 版が出版された．一方，バランスのよい金融工学の教科書としてお勧めしたいのは，Luenberger [3] の *Investment Science* である．2014 年に 16 年ぶりに改訂され，その邦訳である『金融工学入門（第 2 版)』も出版された．筆者は訳者の一人であるが，訳者あとがきにある「この本をマスターすれば，金融に携わる人たちは，生涯にわたる強力な武器を手にすることになるだろう」という表現は決してオーバーではないと，筆者の経験からも自信をもって言うことができる．

参考文献

[1] 枇々木規雄，田辺隆人，『ポートフォリオ最適化と数理計画法』，朝倉書店，2005.

[2] E. J. Elton, M. J. Gruber, S. J. Brown and W. N. Goetzmann, *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 9th edition, Wiley, 2014.

[3] D. Luenberger, *Investment Science*, 2nd edition, Oxford University Press, 2014.（今野浩，鈴木賢一，枇々木規雄訳，『金融工学入門（第 2 版)』，日本経済新聞出版社，2015.）

