Approximation algorithms for covering 0-1 integer programming problems

高澤　陽太朗

東京工業大学社会理工学研究科経営工学専攻（現：東京工業大学工学院経営工学系）
指導教員：水野眞治 東京工業大学教授

1. 概要

現実で生じる多くの意思決定問題は離散最適化問題として定式化されることが多い．これらの離散最適化問題のほとんどはNP困難という問題クラスに属しており，P=NPでない限り最適解を多項式時間で見つけるアルゴリズムは存在しない．本研究ではこのようなNP困難に属する問題へのアプローチの一つである近似アルゴリズムの研究を行った．ある最適解をもつ最小化問題に対する α-近似アルゴリズムとは，その問題の最適値の α 倍以下の解を多項式時間で出力するアルゴリズムである．また，この α を近似比と呼ぶ．近似アルゴリズムと対照的なアルゴリズムとしてヒューリスティックがある．近似アルゴリズムでは理論的に精度の保証を与え，一方でヒューリスティックでは実験的にアルゴリズムの性能を確認する．本研究では次の二つの離散最適化問題に対して近似アルゴリズムを与えた：

・Covering 0–1 Integer Program (CIP)
・Partial Covering 0–1 Integer Program (PCIP)

以降の節で各問題，本研究で与えた結果と提案アルゴリズムの概略を述べる．

2. Covering 0-1 Integer Program

CIPは次のような問題である．m 種類の製品 $M = \{1,\dots,m\}$ とその各製品 $i \in M$ に対して需要 d_i が与えられる．また，これらの製品を製造可能な n 箇所の工場の候補 $N = \{1,\dots,n\}$ と各工場 $j \in N$ の開設費用 c_j が与えられる．ただし，工場 $i \in N$ は製品 $j \in M$ を u_{ij} しか生産できない．CIPの目的は，すべての製品の需要を満たしつつ費用の総和が最小となる工場の開設計画を立てることである．CIPは次のように整数計画問題として定式化される：

$$
\text{CIP}\left|\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{j\in N} c_j x_j & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j\in N} u_{ij}x_j \ge d_i, & \forall i \in M, \\
 & x_j \in \{0,1\}, & \forall j \in N.
\end{array}\right.
$$

ただし，u_{ij}，d_i，c_j $(i \in M,\ j \in N)$ は非負の実数とする．CIPは特殊ケースとして最小被覆問題や最小化ナップサック問題を含む広いクラスの問題である．

各制約 $i \in M$ において，非ゼロ係数を持つ要素数を $f_i = |\{i \in N \mid u_{ij} > 0\}|$ と定義する．この節では，一般性を失うことなく以下を仮定する：

・$f_1 \ge f_2 \ge \dots \ge f_m$
・$f_2 \ge 2$

過去にCIPに対して f_1-近似アルゴリズムはいくつか提案されてきた [1]．本研究ではCIPに対して f_2-近似アルゴリズムを与えた．結果的に，$f_1 = n$, $f_2 = 2$ となるCIPの特殊ケースであるフォーシンググラフ付き最小化ナップサック問題に2-近似アルゴリズムを与えた．

提案アルゴリズムはCarnes and Shmoys [2] の最小化ナップサック問題に対する2-近似アルゴリズムの拡張である．以降ではこのアルゴリズムを簡単に説明する．最小化ナップサック問題はCIPにおいて製品の種類を1種類としたとき $(m = 1)$ の問題で次のように定式化される：

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{j\in N} c_j x_j & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j\in N} u_j x_j \ge d, & \\
 & x_j \in \{0,1\}, & \forall j \in N.
\end{array}
$$

Carnes and Shmoysのアルゴリズムでは Carr et al. [1] による最小化ナップサック問題の特殊な緩和問題とその双対問題を考える．そしてこの線形計画問題を厳密に解くことなく，主問題の実行可能な0-1解と双対問題の実行可能解を緩和された相補性条件を満たすように構築する．一般にこのような手法は近似アルゴリズムにおける主双対法とよばれている．

表 1 PCIP とその特殊ケース

問題名	PCIP における制約
PCIP	—
CIP	$p = 0$
PMSCP	$u_{ij} \in \{0,1\}$, d_i ：正の整数
PSCP	$u_{ij} \in \{0,1\}$, $d_i = 1$

提案アルゴリズムは Carnes and Shmoys の CIP において制約が 1 本であるときのアルゴリズムを一般の場合（制約が m 本）に拡張したものである．最小化ナップサック問題のときと同様に，CIP の Carr et al. による緩和問題とその双対問題を考えることができる．提案アルゴリズムは，このようにして得られた緩和問題に対して Carnes and Shmoys の主双対法を拡張したものである．ただし，提案アルゴリズムでは，一番最後に満たす制約が非ゼロ係数を持つ要素が最も大きい制約になるように，各制約を Carnes and Shmoys のアルゴリズムで順に満たしていく．本研究ではこのような提案アルゴリズムが f_2-近似アルゴリズムであることを示した．

3. Partial Covering 0-1 Integer Program

PCIP は CIP の一般化である．CIP ではすべての製品の需要を満たす必要があったが，PCIP では部分的に満たせばよい．より正確には，PCIP では追加のデータとして $p \in \{0,\dots,m\}$ が与えられ，m 種類の製品のうち少なくとも $m-p$ 種類の製品の需要のみを満たせばよい．PCIP は次のように定式化される：

$$
\text{PCIP}\left|\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{j\in N} c_j x_j & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j\in N} u_{ij}x_j + d_i t_i \geq d_i, & \forall i \in M, \\
 & \displaystyle\sum_{i\in M} t_i \leq p, & \\
 & x_j \in \{0,1\}, & \forall j \in N, \\
 & t_i \in \{0,1\}, & \forall i \in M.
\end{array}\right.
$$

各制約における係数の非ゼロ要素数の最大値を $f = \max_{i\in M} |\{i \in N \mid u_{ij} > 0\}|$ とする．

PCIP は CIP 以外にも，Partial Set Cover Problem (PSCP) や Partial Multi-Set Cover Problem (PMSCP) といった問題の一般化でもある．これらの問題の関係性をまとめたものが表 1 である．

PSCP にはいくつかの f-近似アルゴリズムが知られている [3]．PMSCP に対して近年はじめて近似アルゴリズムが与えられた [4, 5]．ただし，そのアルゴリズムの近似比は需要 d や費用 c の値に依存している．本研究では Gandhi et al. [3] の PSCP に対する f-近似アルゴリズムを拡張することによって PCIP に対して $\max\{f, p+1\}$-近似アルゴリズムを提案した．また，提案アルゴリズムは PMSCP に対してはじめて d，c に依存しない近似比を達成するアルゴリズムである．

提案アルゴリズムは，PCIP の $O(n)$ 個の部分問題をサブルーチンを用いて解く．ここで用いるサブルーチンをサブアルゴリズムと呼ぶ．提案手法の元となった Gandhi et al. の手法では，サブアルゴリズムに集合被覆問題に対する主双対法を利用していた．本研究では，サブアルゴリズムとして，3 節で述べた CIP に対する提案アルゴリズムにおいて双対変数の上げ方を工夫したアルゴリズムを用いた．そして，このような提案アルゴリズムが $\max\{f,\ p+1\}$-近似アルゴリズムとなることを示した．

参考文献

[1] R. D. Carr, L. Fleischer, V. J. Leung and C. A. Phillips, “Strengthening integrality gaps for capacitated network design and covering problems,” In *Proceedings of the 11th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 106–115, 2000.
[2] T. Carnes and D. Shmoys, “Primal-dual schema for capacitated covering problems,” *Mathematical Programming*, **153**, pp. 289–308, 2015.
[3] R. Gandhi, K. Samir and S. Aravind, “Approximation algorithms for partial covering problems,” *Journal of Algorithms*, **53**, pp. 55–84, 2004.
[4] Y. Ran, Y. Shi and Z. Zhang, “Local ratio method on partial set multi-cover,” *Journal of Combinatorial Optimization*, **34**, pp. 302–313, 2017. doi:10.1007/s10878-016-0066-0
[5] Y. Ran, Z. Zhang, H. Du and Y. Zhu, “Approximation algorithm for partial positive influence problem in social network,” *Journal of Combinatorial Optimization*, **33**, pp. 791–802, 2017. doi:10.1007/s10878-016-0005-0