不確実状況下における多目的計画問題に対する意思決定手法

矢野　均

本稿では，不確実状況下における多目的計画問題に対する意思決定手法に関する概要と最近の研究成果について解説する．特に，ファジィ数，確率変数，ファジィランダム変数を係数として含む多目的計画問題を取り上げて，対応するパレート最適解を比較することにより，不確実性が解にどのような影響を及ぼしているかについて解説する．

キーワード：多目的計画問題，対話型手法，満足解，ファジィ数，確率変数，ファジィランダム変数

1.　多目的計画問題とは

社会の多様化・複雑化に伴い，現実の意思決定問題は，代替案集合の中から複数の評価基準に基づき，意思決定者の選好構造を反映した解を導出しようとする多目的意思決定問題として定式化できる場合が多い．一般に，多目的意思決定問題は，次の 2 種類に分類することができる．

・多属性決定問題 [1–4]

・多目的計画問題 [5–8]

代替案が列挙できる多属性決定問題に対しては多属性効用理論 [2, 4] や階層意思決定法 (AHP)[3] が提案されている．これに対して，多目的計画問題では，制御可能な決定変数を用いて目的関数（評価基準）や制約式（代替案が満たすべき条件）を関数として数学的に記述することが可能な決定問題を対象としている．本稿では，最近の不確実状況下における多目的計画問題に対する意思決定手法に関する研究について解説するが，紙面の都合上，多目的線形計画問題に限定する．

一般に，多目的線形計画問題は以下のように定式化することができる．

$$\min_{\mathbf{x}\in X}\ (\mathbf{c}_1\mathbf{x},\ldots,\mathbf{c}_k\mathbf{x}) \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{x}$ は決定変数のベクトル，X は与えられた線形制約を満たす実行可能解の集合，$\mathbf{c}_i\mathbf{x}, i=1,\ldots,k$ は互いに相競合する目的関数を表す．問題 (1) は単一目的計画問題の自然な拡張として解釈できるが，各目的関数が互いに相競合しているので，単一目的計画問題の最適解の概念をそのまま適用することはできない．そこで，より消極的な解の概念として，ある目的関数を改善するためには少なくともほかの目的関数を改悪せざるを得ない解，すなわち，パレート最適解が定義されている．

パレート最適解は一般に無限個の点を与えるので，意思決定者はパレート最適解集合の中から意思決定者固有の選好構造に基づく解を導出しなければならない．意思決定者の陰に存在する大局的選好関数を $U(\cdot)$ で表せば，問題 (1) は以下の意思決定問題に帰着する．

$$\max_{\mathbf{x}\in X}\ U(\mathbf{c}_1\mathbf{x},\ldots,\mathbf{c}_k\mathbf{x}) \tag{2}$$

残念ながら，一般に，意思決定者固有の選好関数 $U(\cdot)$ は陽に表現することはできないので，直接選好関数を最大化することにより意思決定者の選好解（選好関数 $U(\cdot)$ を最大にする解）を求めることはできない．その代わりに，問題 (1) に対する任意のパレート最適解は，通常，問題 (1) を何らかの方法で単一目的最適化問題に変換して，その最適解をパレート最適解に対応づけるスカラ化手法 [6] により求めることができる．

問題 (1) に対する意思決定者の満足解を導出するための意思決定手法は，大きく分けて以下の 2 種類に分類できる [6]．ここで，満足解とは，意思決定者が満足な代替案を記述する複数の基準が存在する場合において，それらの基準を満たす代替案のことをいう [6]．

・目標計画法に基づくアプローチ [9–11]

・対話型手法に基づくアプローチ [5, 6]

目標計画法は，意思決定者が各目的関数に対する目標値を主観的に設定して，目標値と目的関数の間の距離を定義した後，その距離を最小化することにより目標値にある意味で近い解を求める意思決定手法である．これに対して，対話型手法は，意思決定者の陰に存在

やの　ひとし
名古屋市立大学大学院人間文化研究科
〒 467–8501 愛知県名古屋市瑞穂区瑞穂町山の畑 1
yano@hum.nagoya-cu.ac.jp

Copyright ⓒ by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

する選好関数を陽に求めることなく，意思決定者との対話を通じて局所的選好情報を最適化問題に組み込むことにより，意思決定者の満足解の候補を逐次更新していき，最終的に意思決定者の満足解を導出しようとする意思決定手法である．

しかし，複雑で不確実な情報に依存する現実の意思決定状況を多目的計画問題として定式化する場合，目的関数や制約式に含まれるパラメータの不確実性や，意思決定者の主観的判断のあいまい性を適切に取り扱うことが極めて重要となる．このような観点から，不確実状況下における多目的計画問題に対して，以下の2種類のアプローチが考察されてきている [7].

・ファジィ計画法に基づくアプローチ [6, 12, 13]

・確率計画法に基づくアプローチ [14, 15]

Zimmermann [12] は，意思決定者が各目的関数に対してファジィ目標をもち，ファジィ目標は対応するメンバシップ関数により設定することができるという仮定のもとで，意思決定者の主観的判断のあいまい性を組み込んだ多目的ファジィ計画問題を定式化し，ファジィ決定 [6, 13] に従う意思決定者の満足解を導出するための線形計画法に基づく手法を，初めて提案した．

目的関数や制約式に含まれる係数が確率変数で表される多目的確率計画問題に対しては，Contini [14] が目標計画法 [9, 10] と確率計画法 [16, 17] の技法を用いて定式化した．その後，Sakawa et al. [7] は，それぞれ，期待値モデル，分散モデル，確率最大化モデルと満足基準最適化モデルに基づき，確率変数係数を含む各目的関数に対する許容目的レベルや許容確率レベルをあらかじめ設定した後，確率や目的関数に対する満足度を表すメンバシップ関数の空間で定義される M パレート最適解集合の中から意思決定者の満足解を導出するための対話型ファジィ満足化手法を提案した．

近年，確率的不確実性と人間の主観的判断のあいまい性が同時に組み込まれる変数として，ファジィランダム変数 [18] が提案され，ファジィランダム変数係数を含む多目的計画問題に対して，確率最大化モデルに基づく対話型ファジィ満足化手法 [19] や満足基準最適化モデルに基づく対話型ファジィ満足化手法 [20] が提案されてきている．これらの提案手法では，確率計画法の技法 [16, 17] とファジィ計画法や可能性計画法の技法 [6, 13] をうまく取り込むことにより，ファジィランダム変数係数を含む多目的計画問題を通常の数理計画問題に変換した後，対応するパレート最適解集合の中から満足解を導出する．

2. 不確実状況下における多目的計画問題

本節では，通常の多目的計画問題に対するパレート最適解と多目的ファジィ計画問題，多目的確率計画問題，および，多目的ファジィランダム計画問題に対するパレート最適解を比較検討することにより，係数の不確実性がパレート最適解にどのような影響を及ぼしているかについて明らかにする．そのため，各目的関数を構成する係数が，それぞれ，通常の数，LR ファジィ数 [21]，正規確率変数，LR 型ファジィランダム変数 [19, 20] で表される以外は同じ条件の 4 種類の多目的計画問題について考察する．

2.1 多目的計画問題とパレート最適解

まず，通常の多目的計画問題 (1) について考察する．次節以降で議論する不確実状況下における多目的計画問題との比較のために，問題 (1) の目的関数 $\mathbf{c}_i\mathbf{x}$ に対して，意思決定者はファジィ目標 $\widetilde{G}_i, i=1,\ldots,k$ [6, 13] をもち，そのメンバシップ関数 $\mu_{\widetilde{G}_i}(y)$, $i=1,\ldots,k$ は連続かつ狭義単調減少であるとする．このとき，問題 (1) は，以下の多目的計画問題に変換することができる．

$$\max_{\mathbf{x}\in X}\left(\mu_{\widetilde{G}_1}(\mathbf{c}_1\mathbf{x}),\ldots,\mu_{\widetilde{G}_k}(\mathbf{c}_k\mathbf{x})\right) \tag{3}$$

問題 (3) を取り扱うために，以下の M パレート最適解 [6] の概念を導入する．

定義 1. 問題 (3) において，$\mu_{\widetilde{G}_i}(\mathbf{c}_i\mathbf{x}) \geq \mu_{\widetilde{G}_i}(\mathbf{c}_i\mathbf{x}^*)$, $i=1,\ldots,k$（ただし，少なくとも一つの不等式に対して狭義の不等号が成立している）を満たす $\mathbf{x}\in X$ が存在しなければ，$\mathbf{x}^*\in X$ を，問題 (3) の M パレート最適解という．

意思決定者が基準メンバシップ値 [6] $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_k)$ を設定すれば，基準メンバシップ値に L_∞ ノルムの意味で近いパレート最適解は次のミニマックス問題を解くことにより得られる．

$$\min_{\mathbf{x}\in X,\lambda\in\Lambda}\lambda$$

subject to

$$\hat{\mu}_i - \mu_{\widetilde{G}_i}(\mathbf{c}_i\mathbf{x}) \leq \lambda, i=1,\ldots,k \tag{4}$$

ここで，$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} [\max_{i=1,\ldots,k}\hat{\mu}_i - 1, \max_{i=1,\ldots,k}\hat{\mu}_i]$ とする．制約式 (4) は等価的に次式で表される．

$$\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(\hat{\mu}_i - \lambda) \geq \mathbf{c}_i\mathbf{x} \tag{5}$$

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

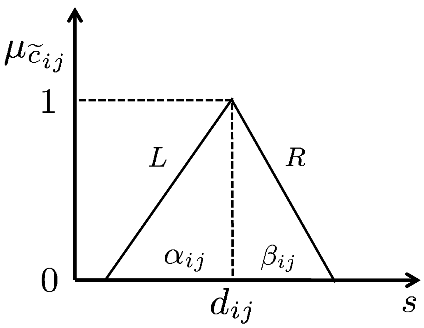

図 1 LR ファジィ数 $\widetilde{c}_{ij}$

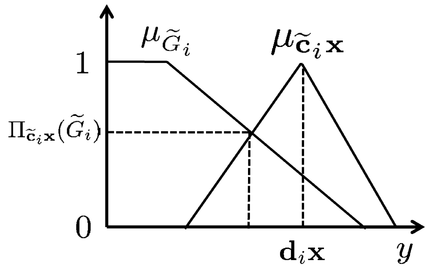

図 2 可能性測度 $\Pi_{\widetilde{\mathbf{c}}_i\mathbf{x}}(\widetilde{G}_i)$

2.2 多目的ファジィ計画問題とパレート最適解

本節では，LR ファジィ数 [21] を係数として含む多目的関数を最小化しようとする次の多目的ファジィ計画問題を定式化する．

$$\min_{\mathbf{x}\in X}(\widetilde{\mathbf{c}}_1\mathbf{x},\ldots,\widetilde{\mathbf{c}}_k\mathbf{x}) \tag{6}$$

ここで，$\widetilde{\mathbf{c}}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\widetilde{c}_{i1},\ldots,\widetilde{c}_{in}), i=1,\ldots,k$ は，i 番目の目的関数の n 次元係数ベクトルで，各要素 $\widetilde{c}_{ij}$ は次式で定義される LR ファジィ数 [21] を表す（図 1 参照）．

$$\mu_{\widetilde{c}_{ij}}(s) = \begin{cases} L\left(\frac{d_{ij}-s}{\alpha_{ij}}\right), & s \le d_{ij} \\ R\left(\frac{s-d_{ij}}{\beta_{ij}}\right), & s > d_{ij} \end{cases}$$

LR ファジィ数を構成する関数 $L(t)$ は $[0,l]$ から $[0,1]$ への連続な狭義単調減少関数で，$L(0)=1, L(l)=0$, $R(t)$ は $[0,r]$ から $[0,1]$ への連続な狭義単調減少関数で，$R(0)=1, R(r)=0$ とする（ただし，$l,r>0$）．また，d_{ij} は LR ファジィ数の平均（メンバシップ関数の 1 になる値），$\alpha_{ij}>0$ と $\beta_{ij}>0$ は左右に広がりのパラメータを表す [21]．このとき，拡張原理 [21] を用いれば，問題 (6) の目的関数は以下のメンバシップ関数で定義される LR ファジィ数となる．

$$\mu_{\widetilde{\mathbf{c}}_i\mathbf{x}}(y) = \begin{cases} L\left(\frac{\mathbf{d}_i\mathbf{x}-y}{\alpha_i\mathbf{x}}\right), & y \le \mathbf{d}_i\mathbf{x} \\ R\left(\frac{y-\mathbf{d}_i\mathbf{x}}{\beta_i\mathbf{x}}\right), & y > \mathbf{d}_i\mathbf{x} \end{cases}$$

ここで，$\mathbf{d}_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} (d_{i1},\ldots,d_{in}), \alpha_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in})$, $\beta_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\beta_{i1},\ldots,\beta_{in})$ とする．

前節と同様に，目的関数の実現値 $\widetilde{\mathbf{c}}_i\mathbf{x}$ に対して，意思決定者はファジィ目標 $\widetilde{G}_i, i=1,\ldots,k$ [6, 13] をもち，そのメンバシップ関数 $\mu_{\widetilde{G}_i}(y)$, $i=1,\ldots,k$ は連続かつ狭義単調減少であるとする．このとき，可能性測度 [21] の概念を用いれば，「目的関数 $\widetilde{c}_i\mathbf{x}$ がファジィ目標 $\widetilde{G}_i$ を満たす可能性の度合い」は，以下のように定義できる（図 2 参照）．

$$\Pi_{\widetilde{\mathbf{c}}_i\mathbf{x}}(\widetilde{G}_i) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_y \min\{\mu_{\widetilde{\mathbf{c}}_i\mathbf{x}}(y), \mu_{\widetilde{G}_i}(y)\}, \quad i=1,\ldots,k \tag{7}$$

したがって，問題 (6) を可能性測度の最大化問題と解釈すれば，以下の多目的計画問題に変換することができる．

$$\max_{\mathbf{x}\in X}(\Pi_{\widetilde{\mathbf{c}}_1\mathbf{x}}(\widetilde{G}_1),\ldots,\Pi_{\widetilde{\mathbf{c}}_k\mathbf{x}}(\widetilde{G}_k)) \tag{8}$$

可能性測度の定義式 (7) より，問題 (8) は以下の形式に置き換えることができる [22]．

$$\max_{\mathbf{x}\in X, h_i\in[0,1], i=1,\ldots,k}\Big(\mu_{\widetilde{G}_1}(f_1(\mathbf{x},h_1)),\ldots, \mu_{\widetilde{G}_k}(f_k(\mathbf{x},h_k))\Big) \tag{9}$$

subject to

$$\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x},h_i)) = h_i, i=1,\ldots,k \tag{10}$$

ただし，$f_i(\mathbf{x},h_i) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{d}_i\mathbf{x} - L^{-1}(h_i)\alpha_i\mathbf{x}, i=1,\ldots,k$, $L^{-1}(\cdot)$ は関数 $L(\cdot)$ の逆関数を表す．

問題 (9), (10) を取り扱うために，以下のパレート最適解の概念を導入する．

定義 2. 問題 (9), (10) において，$\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x},h_i)) \ge \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x}^*,h_i^*)), i=1,\ldots,k$（ただし，少なくとも一つの不等式に対して狭義の不等号が成立している）を満たす $\mathbf{x}\in X, h_i\in[0,1], i=1,\ldots,k$ が存在しなければ，$\mathbf{x}^*\in X, h_i^*\in[0,1], i=1,\ldots,k$ を，問題 (9), (10) の F パレート最適解という．ただし，$\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x}^*,h_i^*)) = h_i^*, \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x},h_i)) = h_i, i=1,\ldots,k$ とする．

意思決定者が基準メンバシップ値 $\hat{\mu}=(\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_k)$

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

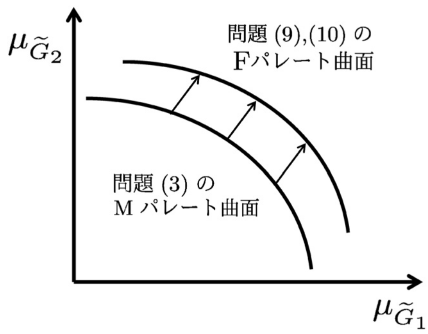

図 3　F パレート曲面と不確実性 $-L^{-1}(\hat{\mu}_i - \lambda)\alpha_i \mathbf{x}$ の影響を表すイメージ図

を設定すれば，対応する F パレート最適解は以下のミニマックス問題を解くことにより得られる．

$$\min_{\mathbf{x}\in X, h_i\in[0,1], i=1,\ldots,k, \lambda\in\Lambda} \lambda$$

subject to

$$\hat{\mu}_i - h_i \leq \lambda, i = 1,\ldots,k, \quad (11)$$
$$\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x}, h_i)) = h_i, i = 1,\ldots,k \quad (12)$$

制約式 (11), (12) は等価的に以下のように変形できる．

$$\mu^{-1}_{\widetilde{G}_i}(\hat{\mu}_i - \lambda) \geq \mathbf{d}_i\mathbf{x} - L^{-1}(\hat{\mu}_i - \lambda)\alpha_i\mathbf{x} \quad (13)$$

ここで，式 (5) と式 (13) を比較する．式 (13) の $\mathbf{d}_i\mathbf{x}$ を式 (5) の $\mathbf{c}_i\mathbf{x}$ とみなせば (すなわち，LR ファジィ数 $\widetilde{\mathbf{c}}_i\mathbf{x}$ のメンバシップ値が 1 となる値を $\mathbf{c}_i\mathbf{x}$ とみなす)，式 (13) の右辺第二項 $-L^{-1}(\hat{\mu}_i - \lambda)\alpha_i\mathbf{x}(\leq 0)$ を目的関数 $\widetilde{\mathbf{c}}_i\mathbf{x}$ の不確実性の影響と解釈することができる．したがって，F パレート最適解は，M パレート最適解よりも，広がりのパラメータ α_i に依存して，常に改善している．図 3 に，M パレート最適解と F パレート最適解のパレート曲面のイメージ図を示す．

2.3　多目的確率計画問題とパレート最適解

本節では，確率変数係数を含む多目的関数を最小化しようとする多目的確率計画問題に対する Sakawa et al. のアプローチ [7] について説明する．

$$\min_{\mathbf{x}\in X}(\bar{\mathbf{c}}_1\mathbf{x}, \ldots, \bar{\mathbf{c}}_k\mathbf{x}) \quad (14)$$

$\bar{\mathbf{c}}_i \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{c}_{i1}, \ldots, \bar{c}_{in})$ は n 次元確率変数行ベクトル，$\bar{c}_{ij}, i = 1,\ldots,k, j = 1,\ldots,n$ は正規分布 $\mathrm{N}(E[\bar{c}_{ij}], \sigma_{ijj})$ に従う正規確率変数，$\bar{c}_{ij}, j = 1,\ldots,n$ 間の分散共分散行列を $(n \times n)$ 次元正定行列 $V_i, i = 1,\ldots,k$ とする．確率変数ベクトル $\bar{\mathbf{c}}_i$ の期待値ベクトルを $\mathbf{E}[\bar{\mathbf{c}}_i] \stackrel{\text{def}}{=} (E[\bar{c}_{i1}], \ldots, E[\bar{c}_{in}])$ とすると，正規分布の性質から，各目的関数 $\bar{\mathbf{c}}_i\mathbf{x}$ は以下の正規分布に従う確率変数となる．

$$\bar{\mathbf{c}}_i\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(\mathbf{E}[\bar{\mathbf{c}}_i]\mathbf{x}, \mathbf{x}^\top V_i\mathbf{x}), i = 1,\ldots,k \quad (15)$$

本節では，問題 (14) に満足基準最適化モデル [7] を適用することにより，取り扱い可能な多目的計画問題に変換する．すなわち，問題 (14) を目的関数 $\bar{\mathbf{c}}_i\mathbf{x}$ がある値 f_i 以下になる確率

$$p_i(\mathbf{x}, f_i) \stackrel{\text{def}}{=} \Pr(\omega \,|\, \mathbf{c}_i(\omega)\mathbf{x} \leq f_i), i=1,\ldots,k \quad (16)$$

を許容確率レベル $\hat{\mathbf{p}} \stackrel{\text{def}}{=} (\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_k)$ 以上にする多目的計画問題として解釈する．ただし，$\hat{p}_i > 0.5, i = 1,\ldots,k$ と仮定する．

$$\min_{\mathbf{x}\in X, f_i\in R^1, i=1,\ldots,k}(f_1, \ldots, f_k) \quad (17)$$

subject to

$$p_i(\mathbf{x}, f_i) \geq \hat{p}_i, i = 1,\ldots,k \quad (18)$$

制約式 (18) は，以下のように変形できる．

$$\begin{aligned} &\hat{p}_i \leq p_i(\mathbf{x}, f_i) = \Phi\left(\frac{f_i - \mathbf{E}[\bar{\mathbf{c}}_i]\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^\top V_i\mathbf{x}}}\right) \\ \Leftrightarrow\ & f_i \geq \mathbf{E}[\bar{\mathbf{c}}_i]\mathbf{x} + \Phi^{-1}(\hat{p}_i)\cdot\sqrt{\mathbf{x}^\top V_i\mathbf{x}} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} f_i(\mathbf{x}, \hat{p}_i) \end{aligned} \quad (19)$$

ここで $\Phi(\cdot), \Phi^{-1}(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数とその逆関数を表す．このとき，問題 (17), (18) は，等価的に以下のような多目的計画問題に変換できる．

$$\min_{\mathbf{x}\in X}(f_1(\mathbf{x}, \hat{p}_1), \ldots, f_k(\mathbf{x}, \hat{p}_k)) \quad (20)$$

もし，意思決定者が，目的関数 $f_i(\mathbf{x}, \hat{p}_i)$ に対するファジィ目標 $\widetilde{G}_i, i = 1,\ldots,k$ をメンバシップ関数 $\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x}, \hat{p}_i))$ で表すことができれば，問題 (20) は以下の多目的計画問題に変換することができる．

$$\max_{\mathbf{x}\in X}\left(\mu_{\widetilde{G}_1}(f_1(\mathbf{x}, \hat{p}_1)), \ldots, \mu_{\widetilde{G}_k}(f_k(\mathbf{x}, \hat{p}_k))\right) \quad (21)$$

問題 (21) を取り扱うために，R パレート最適解の概念を導入する．

定義 3.　問題 (21) において，もし，$\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x}, \hat{p}_i)) \geq \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x}^*, \hat{p}_i)), i = 1,\ldots,k$ （ただし，少なくとも一つの不等式に対して狭義の不等号が成立している）を

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

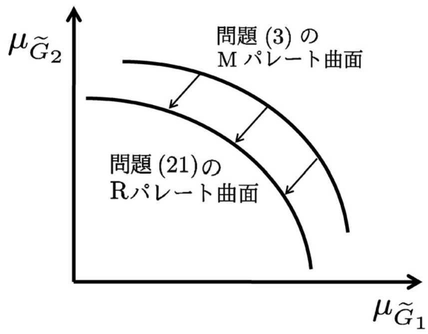

図 4　R パレート曲面と不確実性 $\Phi^{-1}(\hat{p}_i)\cdot\sqrt{\mathbf{x}^\top V_i\mathbf{x}}$ の影響を表すイメージ図

満たす $\mathbf{x}\in X$ が存在しなければ，$\mathbf{x}^*\in X$ を問題 (21) の R パレート最適解という．

意思決定者が基準メンバシップ値 $\hat{\mu}=(\hat{\mu}_1,\ldots,\hat{\mu}_k)$ を設定すれば，対応する R パレート最適解は，次のミニマックス問題を解くことにより得られる．

$$\min_{\mathbf{x}\in X,\lambda\in\Lambda}\lambda \tag{22}$$

subject to

$$\hat{\mu}_i-\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x},\hat{p}_i))\leq\lambda, i=1,\ldots,k \tag{23}$$

制約式 (23) は等価的に以下のように変換できる．

$$\mu_{\widetilde{G}_i}^{-1}(\hat{\mu}_i-\lambda)\geq\mathbf{E}[\bar{\mathbf{c}}_i]\mathbf{x}+\Phi^{-1}(\hat{p}_i)\cdot\sqrt{\mathbf{x}^\top V_i\mathbf{x}} \tag{24}$$

ここで，式 (5) と式 (24) を比較する．式 (24) の $\mathbf{E}[\bar{\mathbf{c}}_i]\mathbf{x}$ を式 (5) の $\mathbf{c}_i\mathbf{x}$ とみなせば（すなわち，正規確率変数 $\bar{\mathbf{c}}_i\mathbf{x}$ の期待値を $\mathbf{c}_i\mathbf{x}$ とみなす），式 (24) の右辺第二項 $\Phi^{-1}(\hat{p}_i)\cdot\sqrt{\mathbf{x}^\top V_i\mathbf{x}}$ を目的関数 $\bar{\mathbf{c}}_i\mathbf{x}$ による不確実性の影響と解釈することができる．ここで，$\hat{p}_i>0.5$ の仮定より，$\Phi^{-1}(\hat{p}_i)\cdot\sqrt{\mathbf{x}^\top V_i\mathbf{x}}>0$ であることから，R パレート最適解は，M パレート最適解よりも，許容確率レベル $\hat{p}_i$ と分散共分散行列 V_i に依存して，常に改悪している．図 4 に，M パレート最適解と R パレート最適解のパレート曲面のイメージ図を示す．

2.4　多目的ファジィランダム計画問題とパレート最適解

本節では，ファジィランダム変数係数を含む多目的関数を最小化しようとする多目的ファジィランダム計画問題に対する Katagiri et al. [19, 20] のアプローチを紹介する．

$$\min_{\mathbf{x}\in X}(\widetilde{\bar{\mathbf{c}}}_1\mathbf{x},\ldots,\widetilde{\bar{\mathbf{c}}}_k\mathbf{x}) \tag{25}$$

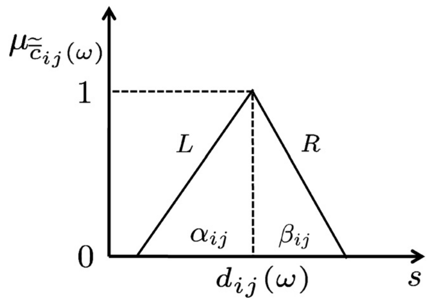

図 5　LR 型ファジィランダム変数 $\widetilde{\bar{c}}_{ij}$ の実現値

$\widetilde{\bar{\mathbf{c}}}_i=(\widetilde{\bar{c}}_{i1},\ldots,\widetilde{\bar{c}}_{in}), i=1,\ldots,k$ は，i 番目の目的関数の n 次元係数ベクトルで，各要素 $\widetilde{\bar{c}}_{ij}$ はファジィランダム変数係数 [18] を表す．

ファジィランダム変数係数を含む目的関数 $\widetilde{\bar{\mathbf{c}}}_i\mathbf{x}, i=1,\ldots,k$ を取り扱うために，Katagiri et al. [19, 20] は，ファジィランダム変数の特殊な形式としてみなすことができる LR 型ファジィランダム変数を定義した．すなわち，LR 型ファジィランダム変数 $\widetilde{\bar{c}}_{ij}$ とは，事象 ω が生起したときの実現値が以下のメンバシップ関数で定義される LR ファジィ数 [21] であるようなファジィランダム変数である（図 5 参照）．

$$\mu_{\widetilde{c}_{ij}(\omega)}(s)=\begin{cases}L\left(\frac{d_{ij}(\omega)-s}{\alpha_{ij}}\right), & s\leq d_{ij}(\omega)\\ R\left(\frac{s-d_{ij}(\omega)}{\beta_{ij}}\right), & s>d_{ij}(\omega)\end{cases}$$

ここで，$\widetilde{c}_{ij}(\omega)$ は事象 ω が生起したときのファジィランダム変数係数 $\widetilde{\bar{c}}_{ij}$ の実現値を表す．LR ファジィ数を構成する関数 $L(t)$ と $R(t)$，および，左右に広がりのパラメータ $\alpha_{ij}>0$,$\beta_{ij}>0$ の定義は 2.2 節と同様とする．LR ファジィ数の平均（メンバシップ関数が 1 になる値）を表すパラメータ $\bar{d}_{ij}$ は正規分布 $\mathrm{N}(E[\bar{d}_{ij}],\sigma_{ijj})$ に従う確率変数 $\bar{d}_{ij}$ であり，確率変数 $\bar{d}_{ij}, j=1,\ldots,n$ 間の分散共分散行列 $V_i, i=1,\ldots,k$ は正定であると仮定する．

確率変数のベクトル $\bar{\mathbf{d}}_i\overset{\mathrm{def}}{=}(\bar{d}_{i1},\ldots,\bar{d}_{in})$ の期待値ベクトルを $\mathbf{E}[\bar{\mathbf{d}}_i]\overset{\mathrm{def}}{=}(E[\bar{d}_{i1}],\ldots,E[\bar{d}_{in}])$ とすれば，正規分布の性質により，$\bar{\mathbf{d}}_i\mathbf{x}$ も正規分布に従う確率変数となる．

$$\bar{\mathbf{d}}_i\mathbf{x}\sim\mathrm{N}(\mathbf{E}[\bar{\mathbf{d}}_i]\mathbf{x},\mathbf{x}^\top V_i\mathbf{x}), i=1,\ldots,k \tag{26}$$

Katagiri et al. [19, 20] は，拡張原理 [21] を用いることにより，問題 (25) の目的関数の実現値 $\widetilde{\mathbf{c}}_i(\omega)\mathbf{x}$ が以下のメンバシップ関数で定義される LR ファジィ数となることを示した．

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

$$\mu_{\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}_i(\omega)\mathbf{x}}(y) = \begin{cases} L\left(\frac{\mathbf{d}_i(\omega)\mathbf{x}-y}{\alpha_i\mathbf{x}}\right), & y \le \mathbf{d}_i(\omega)\mathbf{x} \\ R\left(\frac{y-\mathbf{d}_i(\omega)\mathbf{x}}{\beta_i\mathbf{x}}\right), & y > \mathbf{d}_i(\omega)\mathbf{x} \end{cases}$$

前節と同様，目的関数の実現値$\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}_i(\omega)\mathbf{x}$に対して，意思決定者はファジィ目標$\widetilde{G}_i, i=1,\dots,k$をもち，そのメンバシップ関数$\mu_{\widetilde{G}_i}(y)$，$i=1,\dots,k$は連続かつ狭義単調減少であるとする．このとき，可能性測度 [21] の概念を用いれば，「目的関数$\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}_i\mathbf{x}$がファジィ目標$\widetilde{G}_i$を満たす可能性の度合い」は，以下のように定義できる [19, 20]．

$$\Pi_{\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}_i\mathbf{x}}(\widetilde{G}_i) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_y \min\{\mu_{\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}_i\mathbf{x}}(y), \mu_{\widetilde{G}_i}(y)\},$$
$$i=1,\dots,k \quad (27)$$

この可能性測度を用いれば，問題 (25) は以下の多目的確率計画問題に変換することができる．

$$\max_{\mathbf{x}\in X}(\Pi_{\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}_1\mathbf{x}}(\widetilde{G}_1),\dots,\Pi_{\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}_k\mathbf{x}}(\widetilde{G}_k)) \quad (28)$$

もし，意思決定者が許容確率レベル$\hat{p}_i(>0.5), i=1,\dots,k$を設定すれば，問題 (28) は満足基準最適化モデル [7] に基づく以下の多目的計画問題に変換できる．

$$\max_{\mathbf{x}\in X, h_i\in[0,1], i=1,\dots,k}(h_1,\dots,h_k) \quad (29)$$

subject to

$$\Pr(\omega \mid \Pi_{\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}_i(\omega)\mathbf{x}}(\widetilde{G}_i) \ge h_i) \ge \hat{p}_i, i=1,\dots,k \quad (30)$$

制約式 (30) の左辺は可能性測度の定義式 (27) より等価的に次式に変形できる．

$$\Pr(\omega \mid \Pi_{\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}_i(\omega)\mathbf{x}}(\widetilde{G}_i) \ge h_i)$$
$$= \Phi\left(\frac{\mu^{-1}_{\widetilde{G}_i}(h_i) - (\mathbf{E}[\bar{\mathbf{d}}_i]\mathbf{x} - L^{-1}(h_i)\alpha_i\mathbf{x})}{\sqrt{\mathbf{x}^\top V_i\mathbf{x}}}\right)$$

したがって，制約式 (30) は等価的に次のように変換できる．

$$\mu^{-1}_{\widetilde{G}_i}(h_i) \ge (\mathbf{E}[\bar{\mathbf{d}}_i]\mathbf{x} - L^{-1}(h_i)\alpha_i\mathbf{x})$$
$$+\Phi^{-1}(\hat{p}_i)\cdot\sqrt{\mathbf{x}^\top V_i\mathbf{x}}$$
$$\stackrel{\mathrm{def}}{=} f_i(\mathbf{x}, h_i, \hat{p}_i) \quad (31)$$

以上より，制約式 (30) は次式に変換できる．

$$\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x}, h_i, \hat{p}_i)) \ge h_i, i=1,\dots,k \quad (32)$$

ここで，関数$f_i(\mathbf{x}, h_i, \hat{p}_i)$は任意の$\mathbf{x}\in X$において，$h_i$に関する連続かつ狭義単調増加関数であることから，$h_i$を最大化する場合，制約式 (32) は常に活性（等式で成立）でなければならない．この観点から，問題 (29), (30) は以下の形式に置き換えることができる [23]．

$$\max_{\mathbf{x}\in X, h_i\in[0,1], i=1,\dots,k}(\mu_{\widetilde{G}_1}(f_1(\mathbf{x}, h_1, \hat{p}_1)),\dots,$$
$$\mu_{\widetilde{G}_k}(f_k(\mathbf{x}, h_k, \hat{p}_k))) \quad (33)$$

subject to

$$\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x}, h_i, \hat{p}_i)) = h_i, i=1,\dots,k \quad (34)$$

問題 (33), (34) を取り扱うために，以下の FR パレート最適解の概念を導入する．

定義 4. 問題 (33), (34) において，$\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x}, h_i, \hat{p}_i)) \ge \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x}^*, h_i^*, \hat{p}_i))$, $i=1,\dots,k$（ただし，少なくとも一つの不等式に対して狭義の不等号が成立している）を満たす$\mathbf{x}\in X, h_i\in[0,1], i=1,\dots,k$が存在しなければ，$\mathbf{x}^*\in X, h_i^*\in[0,1], i=1,\dots,k$を，問題 (33), (34) の FR パレート最適解という．ただし，$\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x}^*, h_i^*, \hat{p}_i)) = h_i^*, \mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x}, h_i, \hat{p}_i)) = h_i, i=1,\dots,k$とする．

意思決定者が基準メンバシップ値$\hat{\mu}=(\hat{\mu}_1,\dots,\hat{\mu}_k)$を設定すれば，対応する FR パレート最適解は以下のミニマックス問題を解くことにより得られる．

$$\min_{\mathbf{x}\in X, h_i\in[0,1], i=1,\dots,k, \lambda\in\Lambda}\lambda$$

subject to

$$\hat{\mu}_i - h_i \le \lambda, i=1,\dots,k, \quad (35)$$
$$\mu_{\widetilde{G}_i}(f_i(\mathbf{x}, h_i, \hat{p}_i)) = h_i, i=1,\dots,k \quad (36)$$

制約式 (35), (36) は等価的に次の制約式に変形できる．

$$\mu^{-1}_{\widetilde{G}_i}(\hat{\mu}_i-\lambda) \ge \mathbf{E}[\bar{\mathbf{d}}_i]\mathbf{x} - L^{-1}(\hat{\mu}_i-\lambda)\alpha_i\mathbf{x}$$
$$+\Phi^{-1}(\hat{p}_i)\cdot\sqrt{\mathbf{x}^\top V_i\mathbf{x}} \quad (37)$$

ここで，式 (5) と式 (37) を比較する．式 (37) の$\mathbf{E}[\bar{\mathbf{d}}_i]\mathbf{x}$を式 (5) の$\mathbf{c}_i\mathbf{x}$とみなせば（すなわち，LR 型ファジィランダム変数$\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}_i\mathbf{x}$の平均$\bar{\mathbf{d}}_i\mathbf{x}$の期待値を$\mathbf{c}_i\mathbf{x}$とみなす），式 (37) の右辺第二項$-L^{-1}(\hat{\mu}_i-\lambda)\alpha_i\mathbf{x}(\le 0)$を LR 型ファジィランダム変数$\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}_i\mathbf{x}$の主観的あいまい性の影響，右辺第三項$\Phi^{-1}(\hat{p}_i)\cdot\sqrt{\mathbf{x}^\top V_i\mathbf{x}}$（$\hat{p}_i>0.5$の仮定より常に正）を LR 型ファジィランダム変数$\tilde{\tilde{\mathbf{c}}}_i\mathbf{x}$の確率的不確実性の影響として解釈することができる．この場合，2 種類の不確実性の不等号の向きが逆であることから，M パレート最適解と FR パレート最適解の大小関係は明確ではない．図 6 に，M パレート最適解と FR パレート最適解のパレート曲面のイメージ図を示す．

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

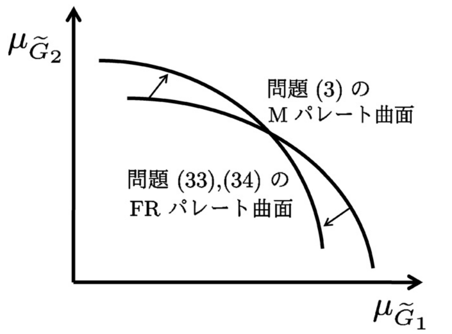

図 6 FR パレート曲面と不確実性 $-L^{-1}(\hat{\mu}_i - \lambda)\alpha_i\mathbf{x} + \Phi^{-1}(\hat{p}_i) \cdot \sqrt{\mathbf{x}^\top V_i \mathbf{x}}$ の影響を表すイメージ図

3. 不確実状況下における多目的計画問題に対する意思決定手法の特徴

前節において，不確実状況下における多目的計画問題の代表例として，ファジィ数，確率変数，ファジィランダム変数を目的関数の係数に含む多目的計画問題を定式化し，係数の不確実性が従来のパレート最適解にどのような影響を与えているのかについて明らかにした．不確実状況下における多目的計画問題に対する意思決定手法を取り扱う際に重要な点は，意思決定者がモデルに含まれる不確実性の影響を正しく認識することであり，そのためには，不確実性をどのように数学モデルに組み込んでいるかについてあらかじめ理解しておくことが必要である．一般に，多目的計画問題に対する対話型手法では，各目的関数間のトレードオフを考慮して，意思決定者の選好構造を反映する満足解を導出することが最終目的となる．これに対して，不確実状況下における多目的計画問題に対する対話型手法では，各目的関数間のトレードオフのみならず，係数の不確実性が解に及ぼす影響をも考慮することにより，不確実性を考慮した意思決定者の満足解を導出することが可能となる．

また，不確実な係数を含む多目的計画問題を取り扱うには，何らかの方法で取り扱い可能な問題に変換することが必要となる．この際，意思決定者は，許容確率レベルなどのしきい値となるパラメータを主観的に設定することが要求される．意思決定者が適切なしきい値を設定するために，ファジィ決定 [6, 13] を活用して種々のしきい値を自動的に調整する手法も提案されてきている [22–24].

さらに，本稿では紙面の都合上述べることができなかったが，不確実状況下における多目的計画問題として，ランダムファジィ変数 [25] を含む多目的計画問題や二段階計画法 [16, 17] に基づく多目的確率計画問題など，種々の定式化が提案されてきている．

4. おわりに

本稿では，不確実状況下における多目的計画問題に対する意思決定手法として，3 種類の不確実な変数（LR ファジィ数，正規確率変数，LR 型ファジィランダム変数）で表される係数を含む多目的計画問題を取り上げ，それらのパレート最適解を比較することにより，不確実性が解にどのような影響を及ぼしているかについて解説した．不確実性をモデルに組み込むことにより，より現実に近い数学モデルを構築することが可能となる反面，モデルが複雑になるため，意思決定者は，あらかじめ，取り扱う多目的計画問題に対する解の意味を十分に理解することが要求される．このような意思決定者に対する負担を最小限に抑えると同時に，不確実性を適切に組み込む多目的計画問題の定式化と対応する意思決定手法の開発が望まれる．

参考文献

[1] F. Eisenfuhr, M. Weber and T. Langer, *Rational Decision Making*, Springer, 2010.
[2] R. L. Keeney and H. Raiffa, *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-offs*, Wiley, 1976.
[3] T. L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, 1980.
[4] F. Seo and M. Sakawa, *Multiple Criteria Decision Analysis in Regional Planning*, Springer, 1988.
[5] V. Chankong and Y. Y. Haimes, *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*, Elsevier, North-Holland Publishing, 1983.
[6] M. Sakawa, *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, 1993.
[7] M. Sakawa, I. Nishizaki and H. Katagiri, *Fuzzy Stochastic Multiobjective Programming*, Springer, 2011.
[8] M. Sakawa, H. Yano and I. Nishizaki, *Linear and Multiobjective Programming with Fuzzy Stochastic Extensions*, Springer, 2013.
[9] J. P. Ignizio, *Goal Programming and Extensions*, Lexington Books, D.C. Heath and Company, 1976.
[10] J. P. Ignizio, *Linear Programming in Single and Multiple Objective Systems*, Prentice-Hall, 1982.
[11] S. M. Lee, *Goal Programming for Decision Analysis*, Auerbach, 1972.
[12] H.-J. Zimmermann, "Fuzzy programming and linear programming with several objective functions," *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, pp. 45–55, 1978.
[13] H.-J. Zimmermann, *Fuzzy Sets, Decision-Making and Expert Systems*, Kluwer Academic Publishers, 1987.
[14] B. Contini, "A stochastic approach to goal programming," *Operations Research*, **16**, pp. 576–586, 1968.
[15] I. M. Stancu-Minasian, *Stochastic Programming*

Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.

with Multiple Objective Functions, Springer, 1984.
[16] J. R. Birge and F. Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming*, Springer, 1997.
[17] P. Kall and J. Mayer, *Stochastic Linear Programming Models, Theory, and Computation*, Springer, 2005.
[18] H. Kwakernaak, "Fuzzy random variable-1," *Information Sciences*, **15**, pp. 1–29, 1978.
[19] H. Katagiri, M. Sakawa, K. Kato and I. Nishizaki, "Interactive multiobjective fuzzy random linear programming: Maximization of possibility and probability," *European Journal of Operational Research*, **188**, pp. 530–539, 2008.
[20] 片桐英樹，坂和正敏，加藤浩介，大崎修嗣，"ファジーランダム多目的線形計画問題に対する可能性測度と必然性測度を用いた満足基準最適化モデルに基づく対話型ファジー満足化手法，"電子情報通信学会論文誌 A，**J87-A**, pp. 634–641, 2004.
[21] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, 1980.
[22] H. Yano, *Interactive Multiobjective Decision Making Under Uncertainty*, CRC Press, 2016.
[23] 矢野均，『不確実状況下における多目的計画問題に対する意思決定手法』，丸善プラネット，2015.
[24] M. Inuiguchi and M. Sakawa, "A possibilistic linear program is equivalent to a stochastic linear program in a special case," *Fuzzy Sets and Systems*, **76**, pp. 309–317, 1995.
[25] B. Liu, "Random fuzzy dependent-chance programming and its hybrid intelligent algorithm," *Information Sciences*, **141**, pp. 259–271, 2002.

 Copyright © by ORSJ. Unauthorized reproduction of this article is prohibited.