

双方向市場に対する多面体的クリンチングオークション

佐藤 良亮

東京大学大学院情報理工学系研究科数理工学専攻（現：三井住友海上火災保険株式会社）
指導教員：平井広志 東京大学 准教授

1. はじめに

複数財のオークションで買い手が入札額とは別に全体での予算を持つ設定は、実用上自然かつ重要であり、近年盛んに研究が進められている。売り手が1名の単方向市場に対しては、Goel et al. [1] によってポリマトロイド理論を駆使した多面体的クリンチングオークションという極めて汎用的な設定に適用可能な優れた性質を持つメカニズムが提案されている。このメカニズムは、Dobzinski et al. [2] によって予算制約と適合的だと示された Ausubel [3] のクリンチングオークションの一般化である。一方、証券取引や Web 上のディスプレイ広告の割当などの実用的な応用があるにもかかわらず、売り手が複数名の双方向市場の場合に汎用的な予算制約を伴う設定に対する研究は行われていない。背景には双方向市場の場合に古典的な不可能性定理 [4] が存在するため、予算制約の有無によらずに十分な研究が行われていないということがある。

本研究では多面体的クリンチングオークションを拡張し、双方向市場の汎用的な予算制約を伴う設定に適用可能なメカニズムを提案した。本研究の設定はポリマトロイド制約を伴うため非常に汎用的であり、ディスプレイ広告の割当への応用が期待される。また、提案メカニズムは買い手の誘引両立性、個人合理性、パレート最適性、収支バランスなどの望ましい性質を満たしている。証明には Lawler and Martel [5] のポリマトロイド流問題の枠組をオークション理論で初めて利用しており、この点は本研究の技術的な貢献である。

2. 問題設定

n 人の買い手と m 人の売り手からなる双方向市場を考える。買い手の集合を $N := \{1, 2, \dots, n\}$ 、売り手の集合を $M := \{1, 2, \dots, m\}$ とする。買い手 $i \in N$ が売り手 $j \in M$ と取引したい場合に両者を辺 (i, j) で結ぶ。得られた辺集合を $E \subseteq N \times M$ とする。このとき、市場は二部グラフ (N, M, E) として表される。以後、辺 $(i, j) \in E$ を ij と表し、買い手 i 、売り手 j と接続する辺の集合をそれぞれ E_i, E_j とする。

出品されている品物への単位量あたりの価値（評価額）は参加者ごとに定まり、出品者に依らないとする。買い手 i の評価額を $v_i \in \mathbf{R}_+$ として、買い手 i は評価額に対応する値としての入札額 $v'_i \in \mathbf{R}_+$ と、オークション全体での予算 $B_i \in \mathbf{R}_+$ を仲介者に申告する。売り手 j の評価額を $\rho_j \in \mathbf{R}_+$ として、売り手 j は評価額に対応する値としての応札額を仲介者に正直に ρ_j と申告すると仮定する。また、単調劣モジュラ関数 $f_j: 2^{E_j} \rightarrow \mathbf{R}_+$ によって E_j を通じて取引できる品物数が制約されている。 $F \subseteq E_j$ に対し、 $f_j(F)$ が辺の部分集合 F を通じて取引できる最大の品物数に対応する。また、 $f_j(E_j)$ が売り手 j の総品物数に対応する。このとき仲介者がアクセスできる情報は $\mathcal{I} := ((N, M, E), \{v'_i\}_{i \in N}, \{B_i\}_{i \in N}, \{\rho_j\}_{j \in M}, \{f_j\}_{j \in M})$ となる。この情報をもとに、仲介者はオークションの割当 $\mathcal{A} := (w, p, r)$ を与える。ただし、 $w := (w_{ij})_{ij \in E}$ は取引量に対応し、 $w_{ij} \in \mathbf{R}_+$ が買い手 i と売り手 j の間の取引量を表す。 $p = (p_i)_{i \in N}$ は買い手の支払額に対応し、 $p_i \in \mathbf{R}_+$ が買い手 i の支払額を表す。 $r = (r_j)_{j \in M}$ は売り手の支払額に対応し、 $r_j \in \mathbf{R}_+$ が売り手 j の収入を表す。なお、割当は予算制約 $p_i \leq B_i$ ($i \in N$) とポリマトロイド制約 $w|_{E_j} \in P_j$ ($j \in M$) を満たす必要がある。ただし、 $w|_{E_j}$ は w の E_j への制限であり、 P_j は f_j に対応するポリマトロイドである。

買い手と売り手の効用は割当 \mathcal{A} によって定まる。買い手 i 、売り手 j の効用をそれぞれ $u_i(\mathcal{A}), u_j(\mathcal{A})$ とし、次のように定義する：

$$u_i(\mathcal{A}) := \begin{cases} v_i \sum_{ij \in E_i} w_{ij} - p_i & \text{if } p_i \leq B_i, \\ -\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$u_j(\mathcal{A}) := r_j + \rho_j \left(f_j(E_j) - \sum_{ij \in E_j} w_{ij} \right).$$

仲介者は買い手と売り手の両方に配慮した割当を与えることが求められる。そのため両者の効用に対して優れた理論保証を伴う、情報 \mathcal{I} から割当 \mathcal{A} を定めるメカニズムを設計したい。

3. 主結果

双方向市場のオークションにおける重要な性質には誘引両立性, 個人合理性, パレート最適性, 収支バランスがあり, 誘引両立性と個人合理性は買い手と売り手のそれぞれで考えられる. 一方, これら全てを満たすメカニズムは存在しないことが知られている [4].

本研究では売り手が応札額を正直に申告すると仮定することで売り手の誘引両立性は考慮せず, その他の性質を全て満たすメカニズムを与えた.

4. 提案メカニズム

まず m 人の仮定の買い手を追加する. 買い手 $n+j$ の入札額と評価額を p_j , 予算を ∞ とし, 売り手 j とのみ辺で結ぶ. この仮定の買い手は対応する売り手と制約なく取引可能である. そして, この操作に伴い, (N, M, E) と P_j を修正する. このとき, 買い手 $n+j$ の取引量はオークション終了時の売り手 j の売れ残りの品物数であるとし, 最終的な売り手 j の効用は買い手 $n+j$ と売り手 j の効用の和となる.

この準備の後に次の操作を行う. 以下は概略である. 買い手 i には価格 c_i が与えられており, 0 から順番に ε ずつ増加する. ある買い手の価格が増加するたびに各買い手のその反復での取引量が計算され, 買い手 i はその量だけ単位量当たり現在価格 c_i で取引する. 取引量 w , 支払額 p , 収入 r は初期値 0 を取り, 買い手の取引に応じて増加して最終的に出力される. また, 価格と残り予算に対して, 需要 d_i を次のように定義する:

$$d_i := \begin{cases} (B_i - p_i)/c_i & \text{if } c_i < v'_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

d_i は買い手 i の現在の価格 c_i のもとで取引したい量の上限を表す. 全員の需要が 0 になったらオークションは終了する. 終了までは次の手順を繰り返す:

1. 各買い手の品物の取引量を計算する (後述).
2. 取引に伴い, 取引量と支払額を更新する.
3. 買い手 l の価格を ε 増加させる.
4. 各買い手の需要を更新する.
5. l を 1 だけ増加. $n+m$ に達したら 1 に戻る.

全員の需要が 0 になったら, 仮定の買い手の取引を全て打ち消して (w, p, r) を出力する.

5. 各反復での取引量の計算

本研究では買い手 i が品物を $\xi_i \in \mathbf{R}_+^{E_i}$ だけ取引すると仮定したときに, i 以外の買い手の以後の取引量の許容集合を変化させない ξ_i で極大なものを買い手 i のその反復での取引量であると定めた. そして条件を満たす ξ_i の許容集合があるポリマトロイドの基多面体をなすことを示した. よって買い手の取引量は多項式時間で計算できる. この導出には (オークション理論で初めて) ポリマトロイド流問題 [5] の枠組を利用しており, 本研究の技術的な貢献である.

6. 先行研究との関係

仮定の買い手を追加した後, 売り手全員を統合して 1 人とみなすことで, [1] の多面的クリンチングオークションが適用可能となる. 各辺を通じての取引量と各売り手の収入が得られないために所望の割当は得られないが, この操作でも各買い手の取引総量と支払額を得られる. 本研究では, 等しい ε のもとで両メカニズムの各買い手の取引総量と支払額は等しいことを示した. したがって提案メカニズムは [1] のメカニズムの双方向市場への拡張となっている. これによって買い手の割当に関する綺麗な構造が導かれ, パレート最適性などの良い性質を示した.

参考文献

- [1] G. Goel, V. Mirrokni and R. P. Leme, "Polyhedral clinching auctions and the adwords polytope," *Journal of the ACM*, **62**, 18:1–18:27, 2015.
- [2] S. Dobzinski, R. Lavi and N. Nisan, "Multi-unit auctions with budget limits," *Games and Economic Behavior*, **74**, pp. 486–503, 2012.
- [3] L. M. Ausubel, "An efficient ascending-bid auction for multiple objects," *American Economic Review*, **94**, pp. 1452–1475, 2004.
- [4] R. B. Myerson and M. A. Satterthwaite, "Efficient mechanisms for bilateral trading," *Journal of Economic Theory*, **29**, pp. 265–281, 1983.
- [5] E. L. Lawler and C. U. Martel, "Computing maximal 'polymatroidal' network flows," *Mathematics of Operations Research*, **7**, pp. 334–347, 1982.