Gauss–Seidel method for multi-leader-follower games

堀　篤史

南山大学大学院理工学研究科システム数理専攻（現：三菱電機株式会社）
指導教員：福島雅夫　南山大学　教授

1. 序論

マルチリーダー・フォロワー (multi-L/F) ゲームは，一部の複数プレイヤー（リーダー）にイニシアチブがあり，残りのプレイヤー（フォロワー）が彼らを追従するように戦略を決定するような階層型非協力ゲームである．その応用に，規制緩和された電力市場や通信市場などがある．

本研究では，multi-L/F ゲームを均衡制約をもつ均衡問題 (EPEC) と呼ばれる問題に再定式化することにより，元の問題がもつ数値的取り扱いにくさを解消する Gauss–Seidel 法を基盤とした 2 段階アルゴリズムを提案する．また，提案したアルゴリズムにおいて，強停留均衡点と呼ばれる解への収束性を証明し，数値実験によって有効性を確認した．

2. Multi-L/F ゲームと EPEC

本節では，本研究で扱う mutli-L/F ゲームの問題設定と EPEC への再定式化を述べ，停留均衡の概念を述べる．

N 人のリーダーと 1 人のフォロワーによる multi-L/F ゲームを考える．リーダーのラベルを $\nu(=1,\dots,N)$ とし，リーダー ν の戦略を $x^\nu\in\Re^{n_\nu}$ とする．また，それぞれのリーダーは費用関数 $\theta^\nu\colon\Re^{n+m}\to\Re$ と制約関数 $g^\nu\colon\Re^{n_\nu}\to\Re^{r_\nu}$,$h^\nu\colon\Re^{n_\nu}\to\Re^{s_\nu}$ が与えられているものとし，どれも C^2 級とする．フォロワーは $y\in\Re^m$ と戦略とし，費用関数 $\gamma\colon\Re^{n+m}\to\Re$ と制約関数 $u\colon\Re^{n+m}\to\Re^p$ が与えられているものとし，どれも C^3 級とする．ここで，$n:=n_1+\cdots+n_N$ とする．リーダー ν は与えられた戦略の組 $x^{-\nu}:=(x^1,\dots,x^{\nu-1},x^{\nu+1},\dots,x^N)\in\Re^{n-n_\nu}$ と $y\in\Re^m$ に対して，次の最適化問題を解く．

$$\begin{aligned}\min_{x^\nu\in\Re^{n_\nu}}\quad & \theta^\nu(x^\nu,x^{-\nu},y)\\ \text{s.t.}\quad & g^\nu(x^\nu)\le 0,\ h^\nu(x^\nu)=0\end{aligned}\tag{1}$$

一方，フォロワーは与えられた戦略の組 $x:=(x^1,\dots,x^N)\in\Re^n$ に対して，次の最適化問題を解く．

$$\min_{y\in\Re^m}\gamma(x,y)\ \ \text{s.t.}\ u(x,y)\le 0\tag{2}$$

ここで，フォロワーの問題 (2) は任意に与えられた $x\in\Re^n$ に対して，凸最適化問題と仮定すると，KKT 条件は問題 (2) に対する必要十分条件となり，以下の混合相補性問題として等価に扱うことができる．

$$\psi(x,y,z,\lambda):=\begin{bmatrix}\nabla_y\gamma(x,y)+\nabla_y u(x,y)\lambda\\ u(x,y)+z\end{bmatrix}=0\tag{3}$$

$$0\le z\perp\lambda\ge 0\tag{4}$$

ただし，$\lambda\in\Re^p$ を Lagrange 乗数とし，$z\in\Re^p$ を不等式制約 $u(x,y)\le 0$ に対するスラック変数とする．方程式系 (3), (4) を問題 (1) の制約条件に取り込むことで，リーダー ν の問題は以下のような $x^{-\nu}$ をパラメータとする相補性制約をもつ数理計画問題 (PMPCC) として再定式化される．

$$\begin{aligned}\mathrm{PMPCC}^\nu(x^{-\nu}):\ \min_{x^\nu,y,z,\lambda}\quad & \theta^\nu(x^\nu,x^{-\nu},y)\\ \text{s.t.}\quad & g^\nu(x^\nu)\le 0,\ h^\nu(x^\nu)=0\\ & \psi(x^\nu,x^{-\nu},y,z,\lambda)=0\\ & 0\le z\perp\lambda\ge 0\end{aligned}$$

問題の組 $(\mathrm{PMPCC}^\nu(x^{-\nu}))_{\nu=1}^N$ の均衡解を見つける問題は均衡制約をもつ均衡問題 (EPEC) と呼ばれる．変数 (y,z,λ) はすべてのリーダーが共通にもつ決定変数のため，共有変数と呼ぶことにする．

一般に，EPEC は均衡解が存在する保証がないうえ，均衡解かどうかを確かめることは困難なため，本研究では均衡解の拡張概念である停留均衡解の求解を目標とする．なかでも，強い性質をもつ強停留均衡解を以下に定義する．

定義. 戦略の組 (x^*,y^*,z^*,λ^*) が EPEC（もしくは multi-L/F ゲームの）強停留均衡点であるとは，それぞれのリーダー ν に対して，解 $(x^{\nu,*},y^*,z^*,\lambda^*)$ が問題 $\mathrm{PMPCC}^\nu(x^{-\nu,*})$ の強停留点 [1] となることである．

3. 提案手法

本節では，EPEC を解くためのアルゴリズムを提案し，multi-L/F の停留均衡を求める手法を二段階に分けて紹介する．

3.1 Phase I: Gauss–Seidel 型ペナルティ法

準備として，問題の変換を行う．まず，相補性条件 $0 \leq z \perp \lambda \geq 0$ は Fischer–Burmeister (FB) 関数 $\phi(a,b) := a + b - \sqrt{a^2+b^2}$ によって，等価な等式制約として表せる．これにより，リーダー ν の $\mathrm{PMPCC}^\nu(x^{-\nu})$ は次のように書き換えられる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}^\nu(x^{-\nu}): \quad & \min_{x^\nu,y,z,\lambda} && \theta^\nu(x^\nu,x^{-\nu},y) \\
& \text{s.t.} && g^\nu(x^\nu) \leq 0,\ h^\nu(x^\nu) = 0 \\
& && \Psi(x^\nu,x^{-\nu},y,z,\lambda) := \\
& && \begin{bmatrix} \psi(x^\nu,x^{-\nu},y,z,\lambda) \\ (\phi(z_i,\lambda_i))_{i=1}^p \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

しかし，FB 関数が微分可能ではないため，$\mathrm{P}^\nu(x^{-\nu})$ は数値的に取り扱いにくい．これを避けるために，二乗 FB 関数が連続的微分可能である性質を利用する．問題 $\mathrm{P}^\nu(x^{-\nu})$ に対する緩和問題を次のように定める．

$$
\overline{\mathrm{P}}^\nu_\rho(x^{-\nu}): \quad \min_{x^\nu,y,z,\lambda} \quad \bar{\theta}^\nu_\rho(x^\nu,x^{-\nu},y,z,\lambda)
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
\bar{\theta}^\nu_\rho(x^\nu,x^{-\nu},y,z,\lambda) := \theta^\nu(x^\nu,x^{-\nu},y) + \frac{\rho}{2}\Bigg[\sum_{i=1}^{r_\nu}[g^\nu_i(x^\nu)]^2_+ \\
+ \sum_{i=1}^{s_\nu}|h^\nu_i(x^\nu)|^2 + \sum_{j=1}^{m+2p}|\Psi_j(x^\nu,x^{-\nu},y,z,\lambda)|^2\Bigg]
\end{aligned}
$$

とし，$\rho > 0$ はペナルティパラメータである．また，$[g^\nu_i(x^\nu)]_+ := \max\{0, g^\nu_i(x^\nu)\}$ とする．この問題の目的関数は微分可能である．

アルゴリズムの概要を説明する．$k = 0,1,2,\ldots$ をステップ数とする．各リーダーは緩和問題 $\overline{\mathrm{P}}^\nu_{\rho_k}(x^{-\nu,(k)})$ を順に解き，適当な終了条件が満たされればアルゴリズムを終了し，そうでなければペナルティパラメータを更新して再び $\nu = 1$ から N まで順に解く．このアルゴリズムに関して以下の結果を得た．

定理. $\rho_k \to \infty$ とする．さらに，各リーダー ν とステップ k に対して $\overline{\mathrm{P}}^\nu_{\rho_k}(x^{-\nu,(k)})$ の解は局所最適解と仮定する．また，解の点列に極限が存在し，極限において MPCC 一次独立制約想定と上位狭義相補性（文献 [1] を参照）が成り立つと仮定する．このとき，極限は multi-L/F ゲームの強停留均衡点である．

3.2 Phase II: Refined Gauss–Seidel 法

前節のアルゴリズム (phase I) によって得られる解の精度は必ずしも高くないが，得られた近似解は相補性制約における有効制約を同定する意味で有用な情報となる．$\bar{w}^{\nu,*} = (x^{\nu,*}, y^{\nu,*}, z^{\nu,*}, \lambda^{\nu,*})$ を phase I で得られたリーダー ν の近似解[1]とする．相補性制約に関して，次のような有効制約集合を定義する．

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathcal{I}}^\nu &:= \{i \mid |\bar{z}^{\nu,*}_i| < \delta,\ |\bar{\lambda}^{\nu,*}_i| \geq \delta\ \} \\
\bar{\mathcal{J}}^\nu &:= \{i \mid |\bar{z}^{\nu,*}_i| < \delta,\ |\bar{\lambda}^{\nu,*}_i| < \delta\ \} \\
\bar{\mathcal{K}}^\nu &:= \{i \mid |\bar{z}^{\nu,*}_i| \geq \delta,\ |\bar{\lambda}^{\nu,*}_i| < \delta\ \}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ただし，$\delta > 0$ は十分に小さい数とする．簡単のため，任意の ν に対して，$\bar{\mathcal{I}} := \bar{\mathcal{I}}^\nu, \bar{\mathcal{J}} := \bar{\mathcal{J}}^\nu, \bar{\mathcal{K}} := \bar{\mathcal{K}}^\nu$ が成り立つと仮定する．以下は近似解 $w^{\nu,*}$ 付近で定義される“相補性制約を含まない”最適化問題である．

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{P}}^\nu(x^{-\nu}): \quad & \min_{x^\nu,y,z,\lambda} && \theta^\nu(x^\nu,x^{-\nu},y) \\
& \text{s.t.} && g^\nu(x^\nu) \leq 0,\ h^\nu(x^\nu) = 0 \\
& && \psi(x^\nu,x^{-\nu},y,z,\lambda) = 0 \\
& && z_i = 0,\ \lambda_i \geq 0\ \ (i \in \bar{\mathcal{I}}) \\
& && z_i = 0,\ \lambda_i = 0\ \ (i \in \bar{\mathcal{J}}) \\
& && z_i \geq 0,\ \lambda_i = 0\ \ (i \in \bar{\mathcal{K}})
\end{aligned}
$$

Phase II では，それぞれのリーダーが $\widetilde{\mathrm{P}}^\nu(x^{-\nu})$ を順に解き，適当な終了条件（収束判定）が満たされれば，アルゴリズムを終了する．最終的に得られた解において，$\widetilde{\mathrm{P}}^\nu(x^{-\nu})$ の KKT 条件がすべてのプレイヤーに対して成り立てば，強停留均衡点が求まったといえる．

Hu and Fukushima [2] の問題例を用いたところ，強停留均衡点が見つかったほか，[2] で得られた解よりも精密な解を得ることに成功した．また，解を更新する際，逐次過緩和法を用いることで，少ない反復回数で同程度の精度をもつ近似解を得ることに成功した．

参考文献

[1] H. Scheel and S. Scholtes, “Mathematical programs with complementarity constraints: Stationarity, optimality, and sensitivity,” *Mathematics of Operations Research*, **25**, pp. 1–22, 2000.

[2] M. Hu and M. Fukushima, “Smoothing approach to Nash equilibrium formulations for a class of equilibrium problems with shared complementarity constraints,” *Computational Optimization and Applications*, **52**, pp. 415–437, 2012.

[1] 共有変数にラベル ν を付すのは，一般に値が各リーダーによって異なるためである．