

ロボット群の分散協調と対称性

山内 由紀子

自律的に移動する計算主体群、特に、ロボット群の自己組織化が分散協調理論において近年注目を集めている。ロボット群を指定した形状に配置するパターン形成問題は群の自己組織化能力の指標として多くの研究が行われており、形成可能なパターンを決める主要因はロボット群の初期配置の対称性であることがわかりつつある。本稿ではパターン形成問題に関する近年の結果を概説し、ロボット群の分散協調と対称性の関係を紹介する。

キーワード：自律移動ロボット群、分散協調、パターン形成問題、対称性、群論

1. はじめに

近年、空間中を自律的に移動する計算主体群の自己組織化がロボティクス、理論計算機科学、生物学、化学などさまざまな分野で注目を集めている。車輪付きロボットやドローンの普及に伴い、探索、監視、輸送を行う群システムがハードウェア的に実現されつつある。DNA 鎖や分子ロボットの構成技術の発展に伴い、プログラマブルな粒子群の振舞いをミクロな立場から設計、解析する手法が必要とされている。理論計算機科学分野では、分散協調理論の立場から移動計算主体群の自己組織化について多数の研究が行われている。個々の計算主体はロボット、エージェント、パーティクル、モジュールなどと呼ばれ、自律移動ロボット群モデル [1]、モジュール群から成る変形可能ロボットモデル [2]、連続空間を移動する探索者を想定したエージェントモデル [3]、アメーバに由来する Amoebot モデル [4] や外力を受けて一斉に移動する粒子群モデル [5]、化学反応系と相性のよい個体群プロトコルモデル [6] など、着目する計算主体の能力と群の振舞いにより、さまざまな計算モデルが提案されている。

本稿では、自律移動ロボット群による形状形成に着目する。各ロボットは匿名(識別不能)な点であり、与えられたアルゴリズムに従って空間中を自律的に移動する。各ロボットの動作単位は観測—計算—移動サイクルである。ロボットは観測フェーズではほかのロボットの位置を観測し、計算フェーズで観測結果をもとに自身の移動先を計算し、移動フェーズで実際に移動を行う。ロボットは GPS のような大域座標系を知らず、明示的な通信手段をもたない。したがって、ロボット群の唯一の協調

手段はほかのロボットの位置の観測であるが、異なるロボット間の観測結果に一貫性はない。各ロボットが観測に用いる座標系を局所座標系と呼ぶ。局所座標系は想定する空間の直交座標系であるとし、原点はそのロボットの現在位置であり、各座標軸の向き、単位距離は任意であるとする。すべてのロボットは共通のアルゴリズムを用いて移動先を計算する。アルゴリズムへの入力が現在のサイクルの観測結果のみであるとき、無記憶なアルゴリズムであると言い、過去のサイクルでの観測、計算結果を入力とするとき、有記憶なアルゴリズムであると言う。無記憶なアルゴリズムを与えられたロボットを無記憶なロボットと呼ぶ。ロボットの動作タイミングについては、詳細は 2 節で紹介するが、完全同期モデル、半同期モデル、非同期モデルの 3 種類を想定する。

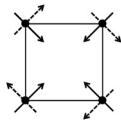
個々のロボットの能力は一見非常に低いが、すべてのロボットを 1 点に集める点形成問題 [7]、円周上に乗せる円形成問題 [8]、指定された形状を形成させるパターン形成問題 [9–11] を解決でき、さまざまな形状を形成できることが知られている¹。既存結果の多くは 2 次元空間(平面上)を移動するロボット群を想定しているが、筆者らの研究チームでは、3 次元空間を移動するロボット群について、すべてのロボットを同一平面に着地させる平面形成問題 [12, 13]、パターン形成問題 [14] の結果を報告している。本稿では、3 次元空間中のロボット群の形状形成問題に関する一連の結果を通して明らかになった、ロボット群の分散協調と対称性の関係を概説する。

2 次元空間でのパターン形成問題については、ロボット群がもつ回転対称性が形成可能な形状を決定することが知られている。例として図 1a のような正方形の頂点に置かれた 4 台のロボットの局所座標系が回転対称な場合を考える。図中では各ロボットの $x-y$ 座標系

¹ 2012 年までの結果は Flocchini et al. による書籍 [1] が詳しく解説している。

やまうち ゆきこ

九州大学大学院システム情報科学研究所
〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744
yamauchi@inf.kyushu-u.ac.jp



(a) 正方形初期配置



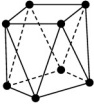
(b) 直線形成 (整列)



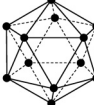
(c) 立方体初期配置



(d) 平面形成



(e) 反四角柱



(f) 正二十面体

図 1 初期配置と目的パターンの例

を直交する矢印で表している。この状況では、4台のロボットの観測結果は同一であり、さらに共通のアルゴリズムで移動先を計算するため、ロボット群が完全に同期して動作すれば永久に(何らかのサイズの)正方形の配置のままであり、たとえば図 1b のように一列に整列することはできない。すべてのロボットが同期して動作する状況は半同期モデル、非同期モデルでも起こりうるため、ロボット群の最悪時の振舞いと言えらる。つまり、ロボット群は局所座標系の回転対称性を解消できない。ここで、2次元空間中の点集合 P の対称度 $\rho(P)$ を次のように定める。 P を中心が共通な正 m -角形へ分割することを考える。1点の場合は、任意の点を中心とする正 1-角形として扱い、その点自体を中心とする必要はない。このような分割が可能な最大の m が $\rho(P)$ である。直感的には、 $\rho(P)$ は P に作用する巡回群の位数と言えらる。しかし、 P の最小包含円の中心 $c(P)$ が P に含まれているとき、 $\rho(P) = 1$ となる。これは、 $c(P)$ 上のロボットが $c(P)$ から移動すれば、ロボット群の配置を非対称にすることができるためである。対称度を用いて、ロボット群が形成可能なパターンは次のように特徴づけられる：無記憶性、非同期性によらず、観測範囲が無数のロボット群が初期配置 P から目的パターン F を形成可能な必要十分条件は $\rho(P) | \rho(F)$ である²。ただし、ランデブー問題と呼ばれる、多重度

² 定義より、 n 点の点集合 P の対称度 $\rho(P)$ は n の約数であるため、円形成、点形成は常に可能と期待できる。実際に、 n 台のロボットは無記憶性、非同期性によらず、任意の初期配置から正 n -角形と多重度 n (ただし、 $n > 2$) の 1 点を形成できる [7, 8].

2 の 1 点から成る目的パターンは除外する [9–11].

上記の結果は 3 次元空間での形状形成問題に自然に拡張できるが、対称度の定義に用いる回転対称性も 3 次元空間中の回転群に拡張することが必要となる。2 次元空間での回転対称性は巡回群のみであるが、3 次元空間での回転対称性は二面体群、正四面体群、正八面体群、正二十面体群を加え、5 種類となる [15–17]. 本稿では、これらの回転群を用いた 3 次元空間の対称度を用いて、ロボット群が 3 次元空間で形成可能な形状の特徴づけを与えられることを紹介する。

3 次元空間中の平面形成問題は 2 次元空間中の整列問題に対応すると考えられる。実際に、3 次元空間で正二十面体の頂点にロボットを置いた初期配置 (図 1f) からは、ロボット群は対称性を解消できず平面を形成できない。一方で、立方体の頂点にロボットを置いた初期配置 (図 1c) からは、平面 (図 1d) や反四角柱 (図 1e) が形成できる。平面や反四角柱には垂直方向があり、立方体にはないことを考えれば、3 次元空間ではロボット群は回転対称性を解消できるように見える。これは、ロボット群が解消できない回転対称性、つまり対称度が配置の回転対称性ではなく、局所座標系の回転対称性であるためである。実際に、3 次元空間中ではロボットの (決定性の) 移動により、配置の回転対称性を対称度まで解消することができる。

本稿ではこれらの結果を概説し、ロボット群の分散協調と対称性の関係を紹介する。

2. 準備

2.1 ロボット群のモデル

n 台のロボットの集合を $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ とする。各ロボットは空間中の匿名な点であり、ロボット $r_i \in R$ の添え字 i は記述の上でのみ用いる。

本稿では離散的な時刻 $t = 0, 1, \dots$ を想定する。ロボット r_i の時刻 t における大域座標系 Z_0 での位置を $p_i(t)$ と表す。ロボット群の時刻 t での配置を $P(t) = \{p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)\}$ と表す。ただし、 $P(0)$ は多重点を含まないとする³。ロボット r_i の局所座標系を Z_i とする⁴。 Z_i は r_i の現在位置を原点とする右手系の直交座標系であり、軸の向き、単位距離は任意である。2 次元空間では Z_i は x - y 直交座標系、3 次元空間では Z_i は x - y - z 直交座標系である。 Z_i で

³ 初期配置 $P(0)$ に多重点が存在する場合、決定性のアルゴリズムで同一点に存在するロボットを分離することができない。そのため、一般的に $P(0)$ には多重点を許さない。

⁴ 正確には $Z_i(t)$ であるが、本稿では Z_i と記述する。

観測した点 p の位置を $Z_i(p)$ と書く。ロボット r_i は起動すると観測-計算-移動サイクルを実行する。まず自身の局所座標系では他のロボットの位置を観測する(観測フェーズ)。時刻 t に r_i が観測を行った場合、 $Z_i(P(t)) = \{Z_i(p_1(t)), Z_i(p_2(t)), \dots, Z_i(p_n(t))\}$ を得る。次に、 r_i は与えられたアルゴリズム ψ を用いて、移動先とそこまでの経路を計算する(計算フェーズ)。 ψ が無記憶アルゴリズムである場合、 ψ は $\psi(Z_i(p))$ と書ける。最後に、 r_i は ψ が出力した移動先へ移動する(移動フェーズ)⁵。

ロボットの起動スケジュールについて次の3種類のモデルを考える。完全同期モデルでは、全ロボットが各時刻に起動し、観測-計算-移動サイクルを実行する。第 t ($t \geq 1$) サイクルは時刻 $(t-1)$ に開始し、すべてのロボットが観測、計算、移動の各フェーズを同期して実行し、時刻 t までに第 t サイクルを終了する。半同期モデルでは、ロボットの起動、サイクルの実行は各時刻ごとであるが、すべてのロボットが各時刻に起動するとは限らない。非同期モデルでは、各サイクルの長さが有限であり、各ロボットが無限回起動すること以外、サイクルの実行タイミングに一切の仮定を置かない。非同期モデルは連続時間上でのモデルであるが、いずれかのロボットが観測を行った時刻を順に t_1, t_2, \dots とし、時刻 t_j を時刻 j とみなせば離散時刻上のモデルとみなせる。これは、どのロボットも観測を行わなかった時刻はロボット群の振舞いに影響を与えないためである。

各時刻のロボット群の配置の系列 $P(0), P(1), \dots$ をアルゴリズム ψ の実行と呼ぶ。ある初期配置 $P(0)$ からでも、ロボットの局所座標系、半同期モデルと非同期モデルではロボットの起動タイミング⁶によってさまざまな実行が存在しうる。ロボット群の分散協調では、与えられた初期配置から開始する任意の実行において、目的とする配置に到達することを要求する。すなわち、最悪時の実行での正当性を保証することが目標である。

2.2 形状形成問題

本稿では、ロボット群によるパターン形成問題と平面形成問題を紹介する。パターン形成問題とは、指定された目的パターン F をロボット群が形成する問題である。目的パターンは大域座標系 Z_0 で観測した点集合として各ロボットに与えられるが、各ロボットは Z_0

を知らないため、 F と相似な配置を作成すればよいとする。すなわち、目的パターン F の拡大縮小、平行移動、回転は許容する。初期配置 $P(0)$ から始まるアルゴリズム ψ の任意の実行 $P(0), P(1), \dots$ において、ある時刻 t が存在し、 $P(t') = P(t)$ ($\forall t' > t$) かつ $P(t)$ が F に相似な場合、アルゴリズム ψ は $P(0)$ から目的パターン F を形成すると言う。また、そのようなアルゴリズム ψ が存在するとき、ロボット群は $P(0)$ から F を形成可能であると言う。

平面形成問題とは、3次元空間中を移動する n ($n \geq 4$) 台のロボットを同一平面に重複なく着地させる問題である。よって、点形成(集合)を行っても平面形成問題の解決とはならない。また、ロボット群が着地する平面は事前には与えられない。初期配置 $P(0)$ から始まるアルゴリズム ψ の任意の実行 $P(0), P(1), \dots$ において、ある時刻 t が存在し、 $P(t') = P(t)$ ($\forall t' > t$) かつ $P(t)$ が同一平面に含まれる場合、アルゴリズム ψ は $P(0)$ から平面を形成すると言う。また、そのようなアルゴリズム ψ が存在するとき、ロボット群は $P(0)$ から平面を形成可能であると言う。

3. 平面形成問題

平面形成問題は着地する平面の合意、初期配置の対称性の解消といった、3次元空間での分散協調における基本的な課題を含んでいる。また、ロボット群を同一平面に着地させることができれば、2次元空間中のロボット群に関する既存結果を3次元空間で利用できる可能性がある。これらの理由から、平面形成問題は3次元空間中のロボット群にとって重要な問題である。

2次元空間での回転対称性は巡回群のみであるが、3次元空間では、さらに二面体群、正四面体群、正八面体群、正二十面体群を加え、5種類の回転対称性が存在する⁷。以下では、これら5種類の回転群を紹介し、ロボット群が平面を形成するための必要十分条件を示す。

3.1 回転群

正四角錐を底面の中心を通り底面に垂直な直線 l を中心に $\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ と回転しても、この正四角錐の見かけは変わらない(図 2a)。このような操作を回転対称操作と呼ぶ。このとき、 l を回転軸と呼び、4回の回転操作を許すので、4回回転軸と呼ぶ。正四角錐に対するこの4個の回転対称操作は巡回群を成す。3次元空間中の回転対称操作が成す群は5種類あ

⁵ 各ロボットが移動フェーズ中に必ず移動先へ到達するモデルを rigid とする。移動中にロボットが停止するモデルを non-rigid とするが、この場合も最小移動距離 δ を保証する。本稿では簡単のため non-rigid な移動モデルを仮定する。

⁶ non-rigid モデルでは移動距離もアドバサリアルに決められると考える。

⁷ 5種類の回転対称性のみしか存在しないことの証明については、群論からの証明、幾何学的証明がそれぞれ文献 [15]、文献 [17] に示されている。

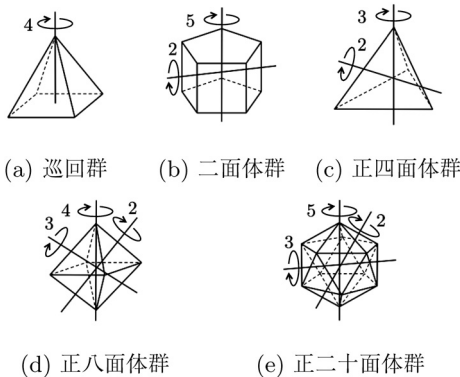


図2 5種類の回転群の直感的な例

表1 3次元的回転群の回転軸の種類と本数, 位数

		回転軸				位数
		2回	3回	4回	5回	
回転群	T	3	4	-	-	12
	O	6	4	3	-	24
	I	15	10	-	6	60

り, 巡回群, 二面体群, 正四面体群, 正八面体群, 正二十面体群である. 各々, 正多角錐, 正多角柱, 正四面体, 正八面体, 正二十面体に対する回転対称操作の成す群として確認できる (図2). 巡回群は1本の回転軸のみを持ち, その回転軸が k 回回転軸であるときに C_k と書く. 二面体群 D_ℓ は1本の ℓ 回回転軸 (主軸) と主軸に直交する ℓ 本の2回回転軸から成る. 正四面体群 T , 正八面体群 O , 正二十面体群 I については表1の通りである. 3次元空間中の回転群の集合を $\mathbb{S} = \{C_k, D_\ell, T, O, I \mid k = 1, 2, 3, \dots, \ell = 2, 3, 4, \dots\}$ とする. C_1 は恒等変換のみから成る群である.

回転群 $G \in \mathbb{S}$ の位数を $|G|$ と表す. \mathbb{S} の要素のうち, T, O, I を3次元的回転群と呼ぶことにする⁸. これら3種類の回転群は, 同一平面上に存在する点集合に作用しない. $\mathbb{S} \setminus \{T, O, I\}$ を2次元的回転群と呼ぶことにする. また, $G, G' \in \mathbb{S}$ について, G' が G の部分群であることを $G' \leq G$, 真部分群であることを $G' \prec G$ と表す. たとえば, $T \prec O, T \prec I$ である.

3次元空間中の点集合 P に対し, P の最小包含球を $B(P)$, その中心を $b(P)$ と表す.

定義1. 3次元空間中の点集合 P の回転群 $\gamma(P)$ を \mathbb{S} の要素で P に作用し, $\gamma(P)$ を真部分群とする \mathbb{S}

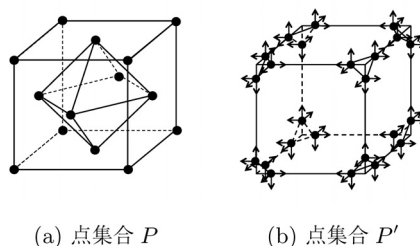


図3 回転群に関する例. (a) $\gamma(P) = O$ により, 点集合 P は立方体の頂点集合と正八面体の頂点集合の二つの軌道に分解される. (b) $\gamma(P') = O$ について対称な局所座標系の例.

の要素も P に作用しない回転群とする.

回転群 $\gamma(P)$ は点集合 P を観測する座標系によらず, 一意に定まる. この $\gamma(P)$ は P を軌道空間に分解する. すなわち, $p \in P$ について, $\gamma(P)$ の群作用による軌道を $Orb(p) = \{p * g : g \in \gamma(P)\}$ とすれば, $\{Orb(p) : p \in P\} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ は軌道空間である. この $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ を P の $\gamma(P)$ -分割と呼ぶ. 図3aに $\gamma(P) = O$ である14個の点集合 P の $\gamma(P)$ -分割を示す. この例からわかるように, 各軌道 P_i のサイズは $|\gamma(P)|$ と一致するとは限らず, 異なる軌道のサイズも一致するとは限らない.

ロボット群の初期配置 P の $\gamma(P)$ -分割の各要素 P_i について, $|P_i| = |\gamma(P)|$ であるとき, 各 P_i について, すべての $p \in P_i$ に $\gamma(P)$ について対称な局所座標系を与えることができる. すなわち, ある $q \in P_i$ の局所座標系 Z_q を任意に定め, 各 $q' \in P_i$ については $q' = g * q$ となる $g \in \gamma(P)$ が一意に定まるため, Z_q に回転対称操作 g を行ったものを g' の局所座標系 $Z_{q'}$ とする⁹. 図3bに一例を示す. このような局所座標系からは, 2次元空間と同様にロボット群は $\gamma(P)$ の対称性を解消することができない. さらに, ロボットが有記憶であっても状況は変わらない.

$|P_i| < |\gamma(P)|$ であるときは, $\gamma(P)$ の各部分群について同様の性質を確認する必要がある. 回転群 G の回転群 $H (G, H \in \mathbb{S})$ への埋込みを次のように定義する. G の各 k 回回転軸を G の k' 回回転軸 (ただし, $k|k'$) へ, G の回転軸の配置を保ったまま埋込めるとき, G を H へ埋込み可能と言う. 点集合 P について, $\gamma(P)$ に埋込み可能な $G \in \mathbb{S}$ を考える. 定義より $G \leq \gamma(P)$ である. G の $\gamma(P)$ へのある埋込みは, P を軌道空間へ分

⁹ Z_q はその原点 $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ の Z_0 での座標で定まる. この4点に g を作用させたものが $Z_{q'}$ である.

⁸ 文献 [17] では正多面体群と呼ばれている.

割する。この分割を P の (G のこの埋込みによる) G -分割と呼ぶ。たとえば、正二十面体の頂点にロボットを置いた配置 P' では、 $\gamma(P') = I$ であり、 $|P'| = 12$ 、 $|I| = 60$ であるが、 $T \prec I$ 、 $|T| = 12$ であることより、 T の I への任意の埋込みにより得られる P' の T -分割の要素のサイズは $|T|$ と一致する。実際に、上記の方法で P' の 12 台のロボットに T について対称な局所座標系を与えることが可能である。軌道のサイズが異なる場合は、それらの最小値に合わせて $G \preceq \gamma(P)$ を選ばよ。

3 次元的な回転群が同一平面上に存在する点集合には作用せず、 $|T| = 12$ 、 $|O| = 24$ 、 $|I| = 60$ であることより、平面形成問題を解くための必要条件が得られる。

定理 2. [13] ロボット群の初期配置 P の $\gamma(P)$ -分割を $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ とする。無記憶性にかかわらず、完全同期モデルのロボット群が P から平面を形成するための必要条件是 (i) $\gamma(P)$ が 2 次元的な回転群であるか、もしくは (ii) $\gamma(P)$ が 3 次元的な回転群であるならば、いずれかの P_i ($i = 1, 2, \dots, m$) について、 $|P_i| \notin \{12, 24, 60\}$ が成立することである。

定理 2 より、正二十面体の頂点にロボットが置かれた初期配置からは、ロボット群は平面を形成できない。同様に、二十・十二面体を除く半正多面体の各々についても、その頂点にロボットを置いた初期配置からは、ロボット群は平面を形成できない。

3.2 平面形成可能な初期配置の特徴づけ

本節では文献 [13] の無記憶な完全同期モデルのロボット群に対する平面形成アルゴリズムの概要を示し、定理 2 の条件が平面形成のための十分条件であることを紹介する。

定理 3. [13] ロボット群の初期配置 P の $\gamma(P)$ -分割を $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ とする。無記憶性にかかわらず、完全同期モデルのロボット群が P から平面を形成するための十分条件は (i) $\gamma(P)$ が 2 次元的な回転群であるか、もしくは (ii) $\gamma(P)$ が 3 次元的な回転群であるならば、いずれかの P_i ($i = 1, 2, \dots, m$) について、 $|P_i| \notin \{12, 24, 60\}$ が成立することである。

定理 3 は初期配置の回転群が 3 次元的な回転群であるもののうち、正四面体、正八面体、立方体、正十二面体、二十・十二面体の頂点にロボットを置いた初期配置から平面が形成できることを保証する。一例として

立方体を考える。立方体の頂点にロボットが置かれた初期配置の回転群は正八面体群である。定理 3 より、この 8 台のロボットは同一平面上に着地できる。しかし、立方体の対称性より、たとえばロボット群が上下、または左右に合意する (共通の認識をもつ) ことは一見難しそうである。ここで、立方体が 6 枚の側面と 8 個の頂点から構成されることを思い出す。各ロボットに次のような単純なアルゴリズムを与える。

Go-to-center アルゴリズム：自身が存在する立方体の頂点に接続している側面のうち 1 枚を選択し、その中心へ移動せよ。
(ただし、衝突回避のため、中心の ϵ 手前で停止せよ。)

8 台のロボットが 6 枚の側面のうちから 1 枚ずつを選択するので、その結果は正八面体群の対称性を残さない。本稿では証明を割愛するが、この Go-to-center アルゴリズムは上記 5 種類の初期配置に対して、実行後のロボット群の配置の回転群が 2 次元的な回転群となることを保証する。ロボット群の初期配置 P が $\gamma(P)$ の複数の軌道から成る場合は、定理 3 の条件を満たす $b(P)$ に最も近い軌道で Go-to-center アルゴリズムを実行すればよい。

ロボット群の配置 P' の回転群 $\gamma(P')$ が 2 次元的な回転群であるとき、平面形成問題は容易に解決できる。巡回群はただ 1 本の回転軸から成り、二面体群は唯一の主軸をもつことから、ロボット群はこれらの回転軸に垂直で、 $b(P')$ を含む平面に合意し、各ロボットがすべてのロボットの着地点を P' の $\gamma(P')$ -分割の要素ごとに順に計算することで¹⁰、重複を避けながら合意した平面に着地することができる。

したがって、定理 2、定理 3 より、平面形成が可能な初期配置の特徴づけを得られた¹¹。この特徴づけは半同期モデルのロボット群にも拡張できる [12]。

4. パターン形成問題

3 次元空間で常に平面形成問題が解決できれば、2 次元空間のパターン形成手法を用いて、点や円を含む平面上のパターン形成を議論できる。しかし、3 節で示したように、平面形成が不可能な初期配置が無限に存

¹⁰点集合 P の $\gamma(P)$ -分割 $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ について、ロボット群は $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ の全順序に合意でき、分散アルゴリズムを考えるには都合がよい。

¹¹後述の対称度を用いれば、この結果は下記のように言い換えられる：無記憶性にかかわらず、完全同期モデルのロボット群が初期配置 P から平面を形成するための必要十分条件は、 $\varrho(P)$ が 2 次元的な回転群のみから成ることである。

在する。さらに、3次元的なパターンの形成可能性は平面形成問題を経て議論する必要はない。本節では、3次元空間中の対称度を導入し、3次元空間でのパターン形成問題を直接議論する。

4.1 対称度

3節では点集合 P の $\gamma(P)$ -分割の要素のサイズで解消できない回転群が決定すると説明した。本節では、ロボット群が解消できない回転群を直接列挙する対称度を導入する。

定義 4. 3次元空間中の点集合 P の対称度 $\varrho(P)$ とは、次の二つの条件を満たす回転群 $G \in \mathbb{S}$ の集合である。
(i) P に作用する (つまり、 $G \leq \gamma(P)$)、かつ (ii) P の G -分割の各要素のサイズが $|G|$ となるような G の $\gamma(P)$ への埋込みが存在する。

たとえば、立方体の頂点の集合を P とすれば、 $\varrho(P) = \{C_1, C_2, C_4, D_2, D_4\}$ である。 $|O| = 24$ より $\gamma(P) = O$ は定義 4 の条件を満たさない。点集合の対称度は次のように言い換えられる：3次元空間中の点集合 P の対称度 $\varrho(P)$ は、 P のいずれの点も含まない $\gamma(P)$ の回転軸の集合に埋込み可能な \mathbb{S} の要素の集合である。

3節と同様に、点集合 P の任意の $G \in \varrho(P)$ について、 G の $\gamma(P)$ への埋込みを任意に定め、 P の G -分割の各要素ごとにひとつの局所座標系を任意に定め、 $G \in \varrho(P)$ の回転対称操作を適用することで、 G について対称な P のすべての点の局所座標系を得る。つまり、ロボット群は初期配置 P の $\varrho(P)$ の任意の要素を解消できない可能性があり、 $\varrho(P)$ の要素の対称性を解消しなくては形成できないような目的パターンは形成できない。

定理 5. [14] 無記憶性によらず、3次元空間中の完全同期モデルのロボット群が初期配置 P から目的パターン F を形成するための必要条件は $\varrho(P) \subseteq \varrho(F)$ である。

4.2 形成可能なパターンの特徴づけ

本節では文献 [14] の無記憶な完全同期モデルのロボット群に対するパターン形成アルゴリズムの概要を示し、定理 5 の条件がパターン形成のための十分条件であることを紹介する。

定理 6. [14] 無記憶性によらず、3次元空間中の完全同期モデルのロボット群が初期配置 P から目的パターン F を形成するための十分条件は $\varrho(P) \subseteq \varrho(F)$ である。

定理 6 は、たとえば、立方体の頂点にロボットが存在する初期配置 P から、反四角柱の頂点にロボットが存在する目的パターン F を形成できることを保証する。しかし、 P ではロボット群は F のもつ垂直方向 ($\gamma(F) = D_4$ の主軸) に合意できず、 P から反四角柱を直接形成することはできない。パターン形成においても、Go-to-center アルゴリズムは有用である。3次元的な回転群をもつ初期配置 P について、 $\gamma(P) \notin \varrho(P)$ のとき、定義より、 $\gamma(P)$ の回転軸上にロボットが存在し、 P は正四面体、立方体、正八面体、立方八面体、正十二面体、正二十面体、二十・十二面体のいずれかの頂点にロボットを配置した点集合を $\gamma(P)$ -分割の要素として含み、以下の補題が成立する。

補題 7. [14] 初期配置 P が正四面体、立方体、正八面体、立方八面体、正十二面体、正二十面体、二十・十二面体のいずれかであるとする。 P ですべてのロボットが Go-to-center アルゴリズムを実行した後の配置を P' とする。このとき、 $\gamma(P') \in \varrho(P)$ が成立する。

Go-to-center アルゴリズムは $\gamma(P)$ の回転軸上のロボットを軸から離れさせることにより、その軸を解消し、 $\varrho(P)$ のいずれかの要素を回転群とする配置 P' に遷移させる。初期配置 P が $\gamma(P)$ の複数の軌道から成る場合は、七つの多面体のいずれかを成す軌道で Go-to-center アルゴリズムを実行すればよい。

以上の手順により得られた P' は $\gamma(P') \in \varrho(P)$ を満たすため、 $\gamma(P') \in \varrho(F)$ 、 $\gamma(P') \leq \gamma(F)$ を満たす。よって、以降の手順では対称性は問題とならない。

ロボット群は大域座標系を知らないため、 F を形成するには目的パターンの配置、サイズを合意しなくてはならない。この手順は簡単で、目的パターンのサイズは、現在の配置 P' の最小包含球 $B(P')$ と目的パターン F の最小包含球 $B(F)$ が等しくなるよう定める。その後、 $\gamma(P')$ の回転軸と $\gamma(F)$ の回転軸を重ねることで (つまり、 $\gamma(P')$ に不足している回転軸を追加することで)、 F の配置を決定する。これらの操作は P' を観測する座標系によらず、一意に計算することができる。このようにして固定された F を \tilde{F} と記述する。

その後、ロボット群は P' と \tilde{F} の完全マッチングを計算する。 P' の $\gamma(P')$ -分解を $\{P'_1, P'_2, \dots, P'_m\}$ 、 \tilde{F} の $\gamma(\tilde{F})$ -分解を $\{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \tilde{F}_k\}$ とすれば、定理 6 の条件より、任意の i, j について、 $|P'_i|$ が $|\tilde{F}_j|$ を割り切る。したがって、完全マッチングの計算は $i = 1, 2, \dots$ の順に、 P'_i をマッチングが決まっていない \tilde{F}_j のう

ち、最小の添え字をもつ要素に割り当てる。その際、各 $q \in P'_i$ は \tilde{F}_j のマッチングが決まっていない点のうち、もっとも近い点を選択する。最後に、すべてのロボットが計算した移動先に移動することで、目的パターン F を形成することができる。

したがって、定理 5、定理 6 より、3 次元空間で形成可能なパターンの特徴づけを得られた。

5. おわりに

対称性は匿名な計算主体群の分散協調を議論する際には必ず登場する話題である。従来のネットワーク型分散システムモデル、つまり匿名グラフにおける対称度は文献 [18] で紹介されている。

本稿では 3 次元空間中を移動するロボット群に着目し、平面形成問題とパターン形成問題を通して、ロボット群の分散協調と対称性の関連を紹介した。3 次元空間中のロボット群の対称度を回転群の集合として定義し、対称度を用いてロボット群が形成可能な形状の特徴づけられることを紹介した。2 次元空間中の対称度は同様に定義される巡回群の最大の位数であることから、3 次元空間中の対称度は 2 次元空間中の対称度の自然な拡張であると言える。本稿ではさらに、ロボット群が移動を行うことによって、配置の回転対称性を解消できる場合が存在することを示した。

3 次元空間中のロボット群については、2 次元空間で議論されている探索問題をはじめとする種々の問題、非同期性、観測範囲、移動性の分散協調への影響、乱択アルゴリズムや故障耐性など、今後の発展が期待される話題が多数残されている。

参考文献

[1] P. Flocchini, G. Prencipe and N. Santoro, *Distributed Computing by Oblivious Mobile Robots*, Morgan & Claypool Publishers, 2012.
[2] A. Dumitrescu, I. Suzuki and M. Yamashita, “Motion planning for metamorphic systems: Feasibility, decidability, and distributed reconfiguration,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **20**, pp. 409–418, 2004.
[3] A. Collins, J. Czyzowicz, L. Gąsieniec and A. Labourel, “Tell me where I am so I can meet you sooner,” In *Proceedings of the 37th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2010)*, pp. 502–514, 2010.
[4] Z. Derakhshandeh, S. Dolev, R. Gmyr, A. W. Richa, C. Scheideler and T. Strothmann, “Brief announce-

ment: Amoebot—a new model for programmable matter,” In *Proceedings of the 26th ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures (SPAA 2014)*, pp. 220–222, 2014.
[5] A. Becker, E. D. Demaine, S. P. Fekete, G. Habibi and J. McLurkin, “Reconfiguring massive particle swarms with limited, global control,” In *Proceedings of the 9th International Symposium on Algorithms and Experiments for Sensor Systems, Wireless Networks and Distributed Robotics (ALGOSENSORS 2013)*, pp. 51–66, 2013.
[6] D. Angluin, J. Aspnes, Z. Diamadi, M. J. Fischer and R. Peralta, “Computation in networks of passively mobile finite-state sensors,” *Proceedings of the 23rd annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC 2004)*, pp. 290–299, 2004.
[7] M. Cieliebak, P. Flocchini, G. Prencipe and N. Santoro, “Distributed computing by mobile robots: Gathering,” *SIAM Journal on Computing*, **41**, pp. 829–879, 2012.
[8] P. Flocchini, G. Prencipe, N. Santoro and G. Viglietta, “Distributed computing by mobile robots: Uniform circle formation,” *Distributed Computing*, **30**, pp. 413–457, 2017.
[9] I. Suzuki and M. Yamashita, “Distributed anonymous mobile robots: Formation of geometric patterns,” *SIAM Journal on Computing*, **28**, pp. 1347–1363, 1999.
[10] M. Yamashita and I. Suzuki, “Characterizing geometric patterns formable by oblivious anonymous mobile robots,” *Theoretical Computer Science*, **411**, pp. 2433–2453, 2010.
[11] N. Fujinaga, Y. Yamauchi, H. Ono, S. Kijima and M. Yamashita, “Pattern formation by oblivious asynchronous mobile robots,” *SIAM Journal on Computing*, **44**, pp. 740–785, 2015.
[12] T. Uehara, Y. Yamauchi, S. Kijima and M. Yamashita, “Plane formation by semi-synchronous robots in the three dimensional Euclidean space,” In *Proceedings of the 18th International Symposium on Stabilization, Safety, and Security of Distributed Systems (SSS 2016)*, pp.383–398, 2016.
[13] Y. Yamauchi, T. Uehara, S. Kijima and M. Yamashita, “Plane formation by synchronous mobile robots in the three dimensional Euclidean space,” *Journal of the ACM*, **64**, pp. 1–43, 2017.
[14] Y. Yamauchi, T. Uehara, and M. Yamashita, “Brief announcement: Pattern formation problem for synchronous mobile robots in the three dimensional Euclidean space,” In *Proceedings of the 2016 ACM Symposium on Principles of Distributed Computing (PODC 2016)*, pp. 447–449, 2016.
[15] M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry*, Springer-Verlag New York Inc., 1988.
[16] P. R. Cromwell, *Polyhedra*, University Press, 1997.
[17] 一松 信, 『正多面体を解く』, 東海大学出版社, 2014.
[18] 亀田恒彦, 山下雅史, 『分散アルゴリズム』, 近代科学社, 1994.