

# 空間確率モデルを用いた 無線干渉場のスケール極限

油山 拓生, 三好 直人

最近, 通信ネットワークにおける通信量の急速な増加に対応するため, 超高密度ネットワークが注目されています。しかし, 無線基地局が高密度で設置されると電波干渉が問題になるかもしれません。本稿では, 無線通信ネットワークの空間確率モデルにおいて基地局の設置密度を限りなく大きくしたときに, その干渉電波の強さに対して成り立つある種の極限定理について概説します。また, この極限定理を用いて超高密度ネットワークの性能を近似的に評価する一つの方法を紹介します。

キーワード: 無線通信ネットワーク, 空間確率モデル, 干渉場, 有限次元分布, スケール極限, 正規確率場,  $\alpha$ -安定確率場

## 1. はじめに

現在, スマートフォンやタブレット端末などの無線通信端末は多くの人にとって日常生活で欠かせないアイテムになっています。そして, 多くの人やモノが通信ネットワークを利用することによって, たとえば日本におけるデータ通信量は毎年2倍くらいの割合で増え続けていると言われていています (つまり10年で1000倍以上になります!!) [1]。こうした通信量の急速な増加に対応するための次世代の無線通信システムとして, 超高密度ネットワーク (ultra-dense networks) が注目されています (たとえば [2] などを参照)。これは, ざっくり言うと, 送信出力が小さく通信範囲の狭い無線基地局を無数に設置することによって大容量のデータ通信を可能にしようというものです。しかし, たくさんの基地局が高密度で設置されると, たとえ一つひとつの基地局の送信出力は小さくても, 同じ周波数域を使う無線電波同士の干渉が問題になるかもしれません。そこで, 基地局の数を増やしていったときに干渉電波の強さがどうなるのか, 無線通信ネットワークの空間確率モデル [3] を用いて考えてみましょうというのが本稿のテーマです。

…と, いかにももっともらしいことを書きましたが, 要するに, 無線ネットワークの空間確率モデルを用いて干渉電波の強さを確率場 (random field) として表し, それに対して基地局の設置密度を無限大にしたと

きの関数型の (一般化) 中心極限定理を導きましょうということです。ここで注意してほしいのは, 一つの標本上で基地局の数を増やしていったときの極限を考えるのではなく, 基地局の設置密度を大きくしたときの, 確率分布の意味での (正確には有限次元分布の意味での) 極限を調べるということです。また, この極限定理を用いて超高密度ネットワークの性能を近似的に評価する一つの方法を紹介します。

## 2. ネットワークモデル

以下では  $\mathbb{R}$  を実数の集合,  $\mathbb{N}$  を自然数の集合とします。また,  $\mathbf{P}$  は確率,  $\mathbf{E}$  は期待値を表すものとします。

$\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  を2次元平面  $\mathbb{R}^2$  上の定常ポアソン (Poisson) 点過程 (たとえば [4] などを参照) として, その強度 (単位面積当たりの点の数の期待値) を  $\lambda \in (0, \infty)$  とします。この点過程  $\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  の各点が無線ネットワークにおける基地局の位置を表すものとして, 点  $X_i$  にある基地局を基地局  $i$  と呼ぶことにします。ここで, 各基地局から発信される無線電波にはすべて同じ周波数域が割り当てられているものとします。無線基地局には, 大きな送信出力で広い範囲をカバーするものから, 送信出力が小さく狭い範囲しかカバーできないものもあり, この送信出力の違いを確率変数として表します。すなわち, 基地局  $i$  の送信出力を表す正の確率変数を  $P_i$  として,  $P_i, i \in \mathbb{N}$ , は互いに独立かつ同一の分布に従い, 点過程  $\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  とも独立であると仮定します。また,  $P_i$  の分布関数を  $F_P(t) = \mathbf{P}(P_i \leq t)$ ,  $t \geq 0$ , 期待値を  $p = \mathbf{E}[P_i] < \infty$  と表します。基地局から発信される無線電波は距離とともにだんだん弱くなって最終的には届かなくなりますが, これを距離

あぶらやま たくみ  
東京工業大学大学院情報理工学研究所 修士課程修了  
みよし なおと  
東京工業大学情報理工学院  
〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-W8-52

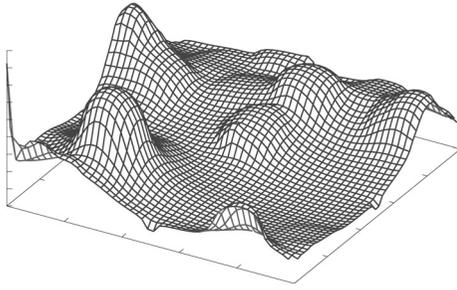


図1 干渉電波の強さを表す確率場のサンプル

$r \geq 0$  に関して単調非増加な関数  $\ell(r)$  で表します. 関数  $\ell$  は経路損失関数 (path-loss function) と呼ばれ, 本稿では  $\int_0^\infty \ell(r) r dr < \infty$  を満たすものを考えます (後で見ると, これは各地点での干渉電波の強さが有限の期待値をもつための条件です). 実際, 無線電波は距離に応じて指数  $-4 \sim -3$  のべき乗で減衰すると言われており [5], たとえば  $\ell(r) = (1+r^\beta)^{-1}$  とすると,  $\beta > 2$  のとき  $\int_0^\infty \ell(r) r dr = (\pi/\beta) \csc(2\pi/\beta) < \infty$  となってこの条件を満たします. このほかに, 建造物などの影響や端末自身を動かすことなどによって無線電波が変動する, シャドウイングやフェイディングと呼ばれる現象があるのですが [5], 本稿では簡略化のためにこれらを無視することにします.

この確率モデルにおいて, 地点  $y \in \mathbb{R}^2$  での干渉電波の強さを

$$I(y) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i \ell(\|y - X_i\|) \quad (1)$$

と定義します. ここで,  $\|\cdot\|$  はユークリッド距離を表します. すなわち, (地点  $y$  にある端末が信号を受け取る基地局は別にあるものとして) 点過程  $\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  によって表される基地局はすべて干渉源と考えます. この  $\{I(y)\}_{y \in \mathbb{R}^2}$  のイメージは図1のようになります. この図で局所的に大きくなっているのが点過程の点があるところ (基地局の位置) で, 点の位置から離れるにしたがって干渉電波が弱くなっていく様子が見られます. 一般に, (1) 式のように表される確率場はショット雑音確率場 (shot-noise fields) と呼ばれています.

### 3. 準備

(1) 式で与えられる確率場  $\{I(y)\}_{y \in \mathbb{R}^2}$  に対して点過程  $\Phi$  の強度を無限大にしたときの極限 (スケール極限) を考えるのですが, 本節ではそのためのいくつかの準備を与えます. まず一つ目はキャンベル (Campbell) の公式です (詳細は [6]などを参照).

#### 命題 3.1 (キャンベルの公式 (定常版))

$\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  を  $\mathbb{R}^d$  ( $d \in \mathbb{N}$ ) 上の定常点過程とし, その強度を  $\lambda$  とする. このとき  $\mathbb{R}^d$  上の任意の非負値関数  $f$  に対して,

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} f(X_i) \right] = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$$

が (両辺が無限大の場合も含めて) 成り立つ.

この公式と  $P_i$  が  $\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  と独立であるという仮定から, (1) 式の  $I(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^2$ , の期待値は

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I(y)] &= \lambda p \int_{\mathbb{R}^2} \ell(\|y - x\|) dx \\ &= 2\pi\lambda p \int_0^\infty \ell(r) r dr < \infty \end{aligned} \quad (2)$$

と表されます (つまり期待値は  $y$  に依存しません).

次は点過程の確率母汎関数 (probability generating functional) です.  $\mathbb{R}^d$  上の点過程  $\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  に対して, その確率母汎関数  $\mathcal{G}_\Phi$  を,  $\mathbb{R}^d$  から  $[0, 1]$  への関数  $f$  の関数

$$\mathcal{G}_\Phi(f) = \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^{\infty} f(X_i) \right]$$

によって定義します ([6]などを参照).  $\Phi$  が定常点過程であれば,  $\int_{\mathbb{R}^d} |\log f(x)| dx < \infty$  を満たす  $f$  に対して有限の  $\mathcal{G}_\Phi(f)$  が存在することが知られています ([6] p. 60). 確率母汎関数は (確率変数に対する母関数と同様に) 点過程の確率分布を定めます. たとえば  $\Phi$  を定常ポアソン点過程とすると, その確率母汎関数は以下で与えられます.

#### 命題 3.2 (ポアソン点過程の確率母汎関数)

$\mathbb{R}^d$  上の点過程  $\Phi$  が強度  $\lambda$  をもつ定常ポアソン点過程であるとき, その確率母汎関数は, 上の条件を満たす関数  $f$  に対して次で与えられる.

$$\mathcal{G}_\Phi(f) = \exp \left\{ -\lambda \int_{\mathbb{R}^d} [1 - f(x)] dx \right\}. \quad (3)$$

この確率母汎関数を用いて, 任意に選んだ  $m$  個の異なる地点での干渉電波の強さ  $I(y_1), I(y_2), \dots, I(y_m)$  の同時ラプラス変換 (joint Laplace transform)  $\mathcal{L}_I(\mathbf{s}) = \mathbb{E}[e^{-\mathbf{s}^\top I(\mathbf{y})}]$  を求めてみましょう. ここで  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_m)^\top \in [0, \infty)^m$  であり,  $\mathbf{s}^\top I(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^m s_j I(y_j)$  です (上付き添え字の  $\top$  はベクトルの

転置を表します). (1) 式と (3) 式から,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I(\mathbf{s}) &= \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^{\infty} e^{-P_i \mathbf{s}^\top \ell(\|\mathbf{y} - X_i\|)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \prod_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}_{P_i}(\mathbf{s}^\top \ell(\|\mathbf{y} - X_i\|)) \right] \\ &= \exp \left\{ -\lambda \int_{\mathbb{R}^2} [1 - \mathcal{L}_P(\mathbf{s}^\top \ell(\|\mathbf{y} - x\|))] dx \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

が得られます. ここで  $\mathbf{s}^\top \ell(\|\mathbf{y} - x\|) = \sum_{j=1}^m s_j \ell(\|y_j - x\|)$  であり, 二つ目の等号では,  $P_i, i \in \mathbb{N}$ , が独立かつ同一の分布に従い, 点過程  $\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  と独立であるという仮定から,  $P_i$  のラプラス変換  $\mathcal{L}_P(\mathbf{s}) = \mathbb{E}[e^{-s P_i}]$  を用いています.

(4) 式の同時ラプラス変換は次節において大きな役割を果たします. 一般に,  $\mathbb{R}^d$  上の確率場  $\{I(y)\}_{y \in \mathbb{R}^d}$  に対して, 任意の  $m \in \mathbb{N}$  と任意に選んだ異なる  $y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathbb{R}^d$  における  $I(y_j), j = 1, 2, \dots, m$ , の同時確率分布

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(I(y_1) \leq t_1, I(y_2) \leq t_2, \dots, I(y_m) \leq t_m) \\ t_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

を  $\{I(y)\}_{y \in \mathbb{R}^d}$  の有限次元分布 (finite-dimensional distribution) と言い, 多くの (私たちが通常考える) 確率場はその有限次元分布によって定まります. 確率変数のラプラス変換が (有限で存在するならば) その確率分布を定めるのと同様に, 任意の  $m \in \mathbb{N}$  と任意に選んだ異なる  $y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathbb{R}^d$  における  $I(y_j), j = 1, 2, \dots, m$ , の同時ラプラス変換は (有限で存在するならば) 確率場  $\{I(y)\}_{y \in \mathbb{R}^d}$  の有限次元分布を定めます. したがって,  $I(y_j), j = 1, 2, \dots, m$ , の同時ラプラス変換の収束を示すことによって, 有限次元分布の収束を示すことができます.

#### 4. 無線干渉場のスケール極限

(1) 式で与えられる確率場  $\{I(y)\}_{y \in \mathbb{R}^2}$  に対して, パラメータ  $c > 0$  とそれに依存する係数  $\rho_c > 0$  を用いて, 点過程の強度 (基地局の設置密度) を  $c\lambda$  とし, 同時に基地局  $i \in \mathbb{N}$  の送信出力を  $\rho_c P_i$  とスケールした確率場  $\{I_c(y)\}_{y \in \mathbb{R}^2}$  を考えます (図 2 を参照). ここで,  $\rho_c P_i$  のラプラス変換は  $\mathcal{L}_P^{(c)}(s) = \mathbb{E}[e^{-s \rho_c P_i}] = \mathcal{L}_P(\rho_c s)$  を満たし,  $I_c(y)$  の期待値は  $\mathbb{E}[I_c(y)] = c \rho_c \mathbb{E}[I(y)]$  となることに注意してください. そして,  $g$  を適当な正の関数として,  $I_c(y)$  とその期待値との差を  $\rho_c g(c)$  で割った

$$\tilde{I}_c(y) = \frac{I_c(y) - \mathbb{E}[I_c(y)]}{\rho_c g(c)}, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad (5)$$

を定義します. 以下では, この  $\{\tilde{I}_c(y)\}_{y \in \mathbb{R}^2}$  が  $c \rightarrow \infty$  としたときに「有限次元分布の意味で」どんな確率場に収束するのかを調べます. ここで一つ白状すると, 実はパラメータ  $\rho_c$  は解析上は何の役割ももっていません (なくても構いません). 実際,  $I_c(y)$  の定義から容易にわかることですが, (5) 式において  $\rho_c$  は相殺されます. では何のために  $\rho_c$  があるのかと言うと, 基地局の設置密度を大きくするとき, たとえば送信出力の小さな基地局を多く設置することによって  $P_i$  の期待値が小さくなる様子を表すことができます.

さて,  $\tilde{I}_c(y_j), j = 1, 2, \dots, m$ , の同時ラプラス変換は, (2), (4), (5) 式から

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{-\mathbf{s}^\top \tilde{I}_c(\mathbf{y})}] \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( -\frac{\mathbf{s}^\top I_c(\mathbf{y})}{\rho_c g(c)} \right) \right] \exp \left( \frac{\mathbb{E}[\mathbf{s}^\top I_c(\mathbf{y})]}{\rho_c g(c)} \right) \\ &= \exp \left\{ c\lambda \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty \psi \left( \frac{\mathbf{s}^\top \ell(\|\mathbf{y} - x\|) t}{g(c)} \right) dF_P(t) dx \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

と表せます. ここで  $\psi(u) = e^{-u} - 1 + u$  であり, 二つ目の等号では  $P_i$  のラプラス変換  $\mathcal{L}_P(\mathbf{s}) = \mathbb{E}[e^{-s P_i}]$  で現れる期待値と  $p = \mathbb{E}[P_i]$  の期待値とをまとめて  $dF_P$  による積分として表しています.

ここから先は  $P_i$  の 2 次モーメント  $\mathbb{E}[P_i^2]$  が有限である場合と発散する場合 (すなわち  $P_i$  の分散が有限であるか発散するか) に分けて考えます.

##### 4.1 $\mathbb{E}[P_i^2] < \infty$ の場合

この場合は, (厳密な手続きなどは省略しますが)  $\psi(u) \leq u^2/2$  かつ  $\psi(u) = u^2/2 + o(u^2)$  ( $u \downarrow 0$ ) であることから, (6) 式において  $g(c) = c^{1/2}$  として次が成り立ちます.

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{-\mathbf{s}^\top \tilde{I}_c(\mathbf{y})}] \\ &= \exp \left\{ \frac{\lambda \mathbb{E}[P_1^2]}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [\mathbf{s}^\top \ell(\|\mathbf{y} - x\|)]^2 dx \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

そして, この右辺が  $m$  次元正規分布の同時ラプラス変換であることから次の結果が得られます.

##### 定理 4.1

$\mathbb{E}[P_i^2] < \infty$  のとき, (5) 式で与えられる確率場  $\{\tilde{I}_c(y)\}_{y \in \mathbb{R}^2}$  は,  $g(c) = c^{1/2}$  かつ  $c \rightarrow \infty$  とすると, その同時ラプラス変換が (7) 式の右辺で表される正規確率場に有限次元分布の意味で収束する.

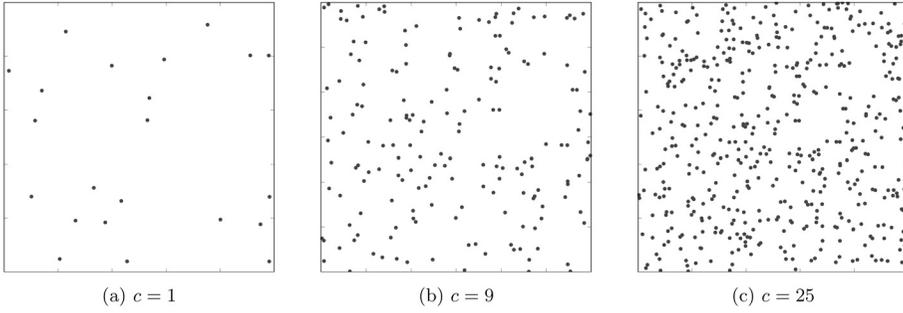


図2 点過程のスケーリングのサンプル

#### 4.2 $E[P_i^2] = \infty$ の場合

この場合は  $P_i$  の分布の裾  $\overline{F_P}(t) = 1 - F_P(t)$  の減衰の仕方にさらに条件を加えます. すなわち, ある定数  $\alpha \in (1, 2)$  と  $a_P > 0$  が存在して,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \overline{F_P}(t) = a_P \quad (8)$$

が成り立つことを仮定します. (8) 式は, 確率分布  $F_P$  の裾が指数  $-\alpha$  のべき乗で減衰することを表しています. このような確率分布は裾の重い (heavy-tailed) 分布と呼ばれる確率分布のクラスに属し ([7]などを参照), ここでは, 大多数の基地局は送信出力が小さいものである中で, ごく稀に送信出力が極端に大きいものが存在しているという状況を表しています (そうだとでも分散が発散するほどのことは普通ないとは思いますが, 理論的側面からの興味ということでご了承ください (^-^);). このとき,  $g(c) = c^{1/\alpha}$  として (6) 式の中の  $dF_P$  に関する積分を部分積分すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \psi\left(\frac{\mathbf{s}^\top \ell(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|) t}{c^{1/\alpha}}\right) dF_P(t) \\ &= \frac{\mathbf{s}^\top \ell(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|)}{c^{1/\alpha}} \\ & \quad \times \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{\mathbf{s}^\top \ell(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|) t}{c^{1/\alpha}}\right)\right] \overline{F_P}(t) dt \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-u}) \overline{F_P}\left(\frac{c^{1/\alpha} u}{\mathbf{s}^\top \ell(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|)}\right) du \end{aligned}$$

となります. ここで二つ目の等号では  $u = \mathbf{s}^\top \ell(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|) t / c^{1/\alpha}$  として置換積分をしています. この式を (6) 式に戻して  $c \rightarrow \infty$  とすると, (ここでも厳密な手続きなどは省略しますが) (8) 式を用いて次の極限が得られます.

$$\begin{aligned} & \lim_{c \rightarrow \infty} E[e^{-\mathbf{s}^\top \tilde{T}_c(\mathbf{y})}] \\ &= \exp\left\{\frac{\lambda a_P \Gamma(2 - \alpha)}{\alpha - 1} \int_{\mathbb{R}^2} [\mathbf{s}^\top \ell(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|)]^\alpha dx\right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

ここで  $\Gamma$  はガンマ関数  $\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-t} t^{u-1} dt$  を表します. (9) 式の右辺は  $m$  次元  $\alpha$ -安定 ( $\alpha$ -stable) 分布と呼ばれる確率分布の (さらに特別な場合の) 同時ラプラス変換を表しており ([8]などを参照), このことから次の結果が得られます.

#### 定理 4.2

確率分布  $F_P$  が  $\alpha \in (1, 2)$  によって (8) 式を満たすとき, (5) 式で与えられる確率場  $\{\tilde{T}_c(\mathbf{y})\}_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2}$  は,  $g(c) = c^{1/\alpha}$  かつ  $c \rightarrow \infty$  とすると, その同時ラプラス変換が (9) 式の右辺で表される  $\alpha$ -安定確率場に有限次元分布の意味で収束する.

ここで, 分布関数  $F_P$  がべき乗の裾をもつという条件 ((8) 式) は,  $\overline{F_P}$  が指数  $-\alpha$  ( $\alpha \in (1, 2)$ ) の正則変動 (regularly varying) 関数である ([9]などを参照) という (少し一般化した) 条件に置き換えることができます [10].

#### 5. 超高密度ネットワークの性能評価への応用

前節で得た結果を用いて超高密度ネットワークの近似評価をしてみましょう. ここでは, 干渉場の極限分布を用いて被覆確率 (coverage probability) と呼ばれる性能評価指標を近似することを考えます.

原点  $o = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$  にある端末が無線ネットワークに接続し, 点過程  $\Phi$  (またはそのパラメータ  $c$  によるスケーリング) によって表される干渉源とは別の基地局 (基地局 0 と呼びます) から発信される信号を受け取るものとします. ここで, 原点から基地局 0 までの距離と基地局 0 の送信出力をそれぞれ正の確率変数

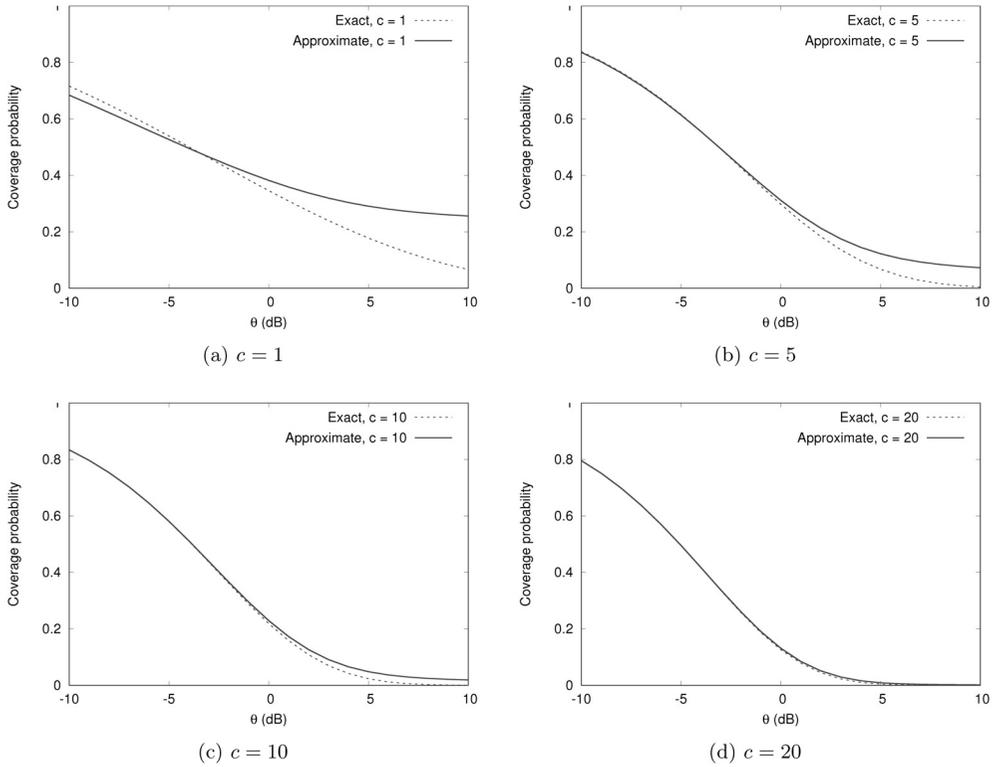


図3 スケール極限を用いた被覆確率の近似 (横軸は  $\theta$  のデシベル (dB) 表示)

$U, P_0$  で表します. この  $U$  と  $P_0$  は互いに独立で, かつ 2 節で定義した  $\Phi = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  や  $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  もも独立であると仮定します. このとき, 原点にある端末で受信する基地局 0 からの電波の強さは  $P_0 \ell(U)$  です. 干渉電波として前節のパラメータ  $c$  によってスケールされたものを考えると, 原点での被覆確率は, 与えられたしきい値  $\theta > 0$  に対して, 受信電波の強さと干渉電波の強さの比 (信号対干渉比 (signal-to-interference ratio) と言います) が  $\theta$  より大きくなる確率

$$P(\text{SIR}_o > \theta), \quad \text{SIR}_o = \frac{P_0 \ell(U)}{I_c(o)}, \quad (10)$$

によって定義されます. ここで確率変数  $U, P_0$  の分布関数をそれぞれ  $F_U, F_0$  とすると, (10) 式の被覆確率は

$$P(\text{SIR}_o > \theta) = \int_0^\infty \int_0^\infty P\left(I_c(o) < \frac{t \ell(u)}{\theta}\right) dF_0(t) dF_U(u)$$

と表され, この  $P(I_c(o) < v)$  ( $v = t \ell(u)/\theta$ ) に前節で得た結果を適用します. すなわち,  $\tilde{I}_c(y)$  の定義 ((5) 式) と  $E[I_c(o)] = c \rho_c E[I(o)]$  であるということから

$$P(I_c(o) < v) = P\left(\tilde{I}_c(o) < \frac{v - c \rho_c E[I(o)]}{\rho_c g(c)}\right)$$

なので, たとえば  $E[P_i^2] < \infty$  のとき, 定理 4.1 より, 十分大きな  $c$  に対して

$$P(I_c(o) < v) \approx \mathcal{N}_{0, \sigma^2} \left( \frac{v - c \rho_c E[I(o)]}{\rho_c c^{1/2}} \right)$$

と近似することができます. ここで  $\mathcal{N}_{\mu, \sigma^2}$  は平均  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$  の正規分布の分布関数を表し, (7) 式から

$$\sigma^2 = \lambda E[P_1^2] \int_{\mathbb{R}^2} \ell(\|x\|)^2 dx$$

です. 一方, 干渉源からの送信出力  $P_i, i \in \mathbb{N}$ , の分布関数  $F_P$  が  $\alpha \in (1, 2)$  によって (8) 式を満たすとき, 定理 4.2 より, 十分大きな  $c$  に対して

$$P(I_c(o) < v) \approx \mathcal{S}_{\alpha, \sigma, \beta, \mu} \left( \frac{v - c \rho_c E[I(o)]}{\rho_c c^{1/\alpha}} \right)$$

と近似できます. ここで  $\mathcal{S}_{\alpha, \sigma, \beta, \mu}$  はパラメータ  $\alpha \in (0, 2), \sigma > 0, \beta \in [-1, 1], \mu \in \mathbb{R}$  によって定まる  $\alpha$ -安定分布 ([8] などを参照) の分布関数を表し ( $\alpha$ -安定分布はいくつかの特別な場合を除いて分布関数の陽な表現をもちませんが, 特性関数 (本稿の場合はラプラス変換) を用いて分布関数の数値計算をすることができます), (9) 式より

$$\sigma^\alpha = -\cos \frac{\pi \alpha}{2} \frac{\lambda a_P \Gamma(2 - \alpha)}{\alpha - 1} \int_{\mathbb{R}^2} \ell(\|x\|)^\alpha dx$$

です ( $\alpha \in (1, 2)$  より右辺は正です).

図3のグラフは,  $\lambda = 0.1$ ,  $F_P(t) = F_0(t) = 1 - e^{-t}$  ( $t \geq 0$ ),  $\ell(r) = (1 + r^4)^{-1}$  ( $r \geq 0$ ),  $\rho_c = c^{-1/2}$ , として  $F_U(u) = 1 - e^{-c\pi u^2}$  ( $u \geq 0$ ) という設定のもとで, 被覆確率を [3] にならって数値積分によって計算したものと, ここで紹介したスケール極限を用いて近似したものとの比較結果です. ( $U$  の確率分布もパラメータ  $c$  をもっていますので, 近似のほうのグラフも  $c$  の値によって形が異なります.) パラメータ  $c$  の値が大きくなるにつれてスケール極限による近似が合っていく様子を見ることができます.

## 6. おわりに

本稿では, 無線通信ネットワークの空間確率モデルにおいて基地局の設置密度を限りなく大きくしたときに, 干渉電波の強さを表す確率場に対して成り立つスケール極限について概説しました. また, その応用として, 超高密度ネットワークの近似評価に適用する方法を紹介しました. 実は4節のスケール極限の結果は (少なくとも  $E[P_i^2] < \infty$  の場合は) それほど新しいものではありません. たとえば Kaj [11] は, 本稿と同様のモデルで  $E[P_i^2] < \infty$  の場合に対して, 一つの地点での干渉電波の強さのスケール極限を導き, その後でそれが有限次元分布にも拡張可能であると述べています. また Baccelli and Biswas [12] は, 経路損失関数が  $\ell(r) = r^{-\beta}$ ,  $r > 0$ , のように原点で発散する場合 (このとき干渉電波の強さは有限の期待値をもちません) のスケール極限を考えているのですが, その Introduction において, 本稿の4節で述べた  $E[P_i^2] < \infty$  の場合の結果を紹介しています. こうした背景のもとで筆者ら [10] は, 4節の結果の拡張として, 基地局の配置を表す点過程が行列式点過程 (determinantal point processes; [13, 14]などを参照) と呼ばれる (点同士が負の相関をもって配置される) 点過程の場合でも同様の結果が得られることを示しています.

## 参考文献

- [1] 情報通信審議会 情報通信技術分科会 技術戦略委員会 第2次中間報告書 (案) 別冊 3, 参考資料, 2016. [http://www.soumu.go.jp/main\\_content/000424361.pdf](http://www.soumu.go.jp/main_content/000424361.pdf) (2018年6月11日閲覧)
- [2] D. López-Pérez, M. Ding and H. Claussen, “Towards 1 Gbps/UE in cellular systems: Understanding ultra-dense small cell deployments,” *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, **17**, pp. 2078–2101, 2015.
- [3] 三好直人, “セルラネットワークの空間点過程モデル,” オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学, **59**, pp. 678–683, 2014.
- [4] G. Last and M. Penrose, *Lectures on the Poisson Process*, Cambridge University Press, 2017.
- [5] 電子情報通信学会, 「知識ベース 知識の森 4群1編 無線通信基礎」, 2010. [http://www.ieice-hbkb.org/portal/doc\\_510.html](http://www.ieice-hbkb.org/portal/doc_510.html) (2018年6月11日閲覧)
- [6] D. J. Daley and D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes, Volume II: General Theory and Structure*, Springer, 2008.
- [7] S. Foss, D. Korshunov and S. Zachary, *An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions*, Springer, 2013.
- [8] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, Chapman & Hall, 1994.
- [9] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, *Regular Variation*, Cambridge University Press, 1987.
- [10] T. Aburayama and N. Miyoshi, “Scaling limits of interference fields in spatial stochastic wireless network models,” in preparation, 2018.
- [11] I. Kaj, “Aspects of wireless network modeling based on Poisson point processes,” *Carleton Applied Probability Workshop*, 2006, [http://www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/05-06/applied\\_probability/kaj.pdf](http://www.fields.utoronto.ca/programs/scientific/05-06/applied_probability/kaj.pdf) (2018年6月11日閲覧)
- [12] F. Baccelli and A. Biswas, “On scaling limits of power law shot-noise fields,” *Stochastic Models*, **31**, pp. 187–207, 2015.
- [13] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres and B. Virág, *Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes*, American Mathematical Society, 2009.
- [14] F. Lavancier, J. Møller and E. Rubak, “Determinantal point process models and statistical inference,” *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **77**, pp. 853–877, 2015.