Nonmonotone Descent Methods for Multiobjective Optimization Problems

三田　佳那子

京都大学大学院情報学研究科（現所属：（株）島津製作所）

指導教員：福田エレン秀美　京都大学　准教授，山下信雄　京都大学　教授

1. はじめに

近年，多目的最適化問題に対して最急降下法をはじめとしたさまざまな降下法が提案されている．降下法では，探索方向を決定し，すべての目的関数値が減少するようにステップ幅を選んで点を更新して解を求める．ここで，多目的最適化では目的関数が複数あるため，ステップ幅が小さくなり収束が遅くなる可能性が考えられる．

また，非単調直線探索とは，ある程度関数値の増加を許してステップ幅を選べる手法である．単一目的最適化問題において収束が速くなる場合が多いことが先行研究の数値実験により示されている．

そこで，本研究では，多目的最適化問題に対する非単調直線探索を提案する．また，その大域的収束性を理論的に証明し，数値実験でその有用性を確かめる．

2. 準備

本稿では，Ω 上で連続的微分可能かつ下に有界である実数値関数 $F_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} (i=1,\ldots,m)$ を成分とするベクトル値関数 $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ と閉凸集合 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ を用いた以下のような多目的最適化問題を考える．

$$\min_{x\in\Omega} \quad F(x) = (F_1(x), \ldots, F_m(x))$$

多目的最適化問題では，すべての目的関数を同時に最小化する解が必ずしも存在するとは限らない．そこで，パレート最適性という概念が定義されている．

定義 2.1. $F(x) \leq F(x^*)$ かつ $F(x) \neq F(x^*)$ となる $x \in \Omega$ が存在しないような $x^* \in \Omega$ をパレート最適解という．また，$\nabla F_i(x)^\top d < 0 (i=1,\ldots,m)$ を満たす $d \in \Omega - x$ を降下方向といい，降下方向が存在しない点をパレート停留点という．

定義 2.1 より，パレート停留点はパレート最適解の必要条件である．また，パレート最適解の集合をパレートフロントという．

多目的最適化問題の解法として，最急降下法，ニュートン法や射影勾配法などが提案されている [1]．これらの手法はそれぞれ凸な部分問題の最適解を探索方向とする．本研究では，それらの部分問題を $\beta > 0$ と正定値行列 B_i を用いて次のように一般化することを考える．

$$\min_{d\in\Omega-x} \quad \max_{i=1,\ldots,m} \left\{ \beta \nabla F_i(x)^\top d + \frac{1}{2} d^\top B_i d \right\} \tag{1}$$

問題 (1) は，目的関数が強凸であるので唯一解をもつ．問題 (1) の最適解を $d^*(x)$，その解の目的関数値を $\theta(x)$ とする．ここで，次の補題が成り立つ．

補題 2.1 [2]**.**

(i) x がパレート停留点であること，$d^*(x) = 0$, $\theta(x) = 0$ はすべて同値である．

(ii) 写像 $x \mapsto \theta(x)$ は連続である．

また，実際に $d^*(x)$ は，β, B_i を適当に選べば，最急降下方向，ニュートン方向，射影勾配方向と一致する．

本研究で扱う降下法は反復法であり，点列 $\{x^k\}$ を生成する手法である．補題 2.1 より，点 x^k に対し，$\theta(x^k) = 0$ であればアルゴリズムを終了し，そうでなければ適当な定数 $\delta \in (0,1)$ を用いた Armijo 条件

$$F_i(x^k + \alpha_k d^*(x^k)) \leq F_i(x^k) + \delta \nabla F_i(x^k)^\top d^*(x^k) \tag{2}$$

をすべての $i = 1, \ldots, m$ について満たす $\alpha_k > 0$ を選び，点を $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d^*(x^k)$ と更新する．パレートフロントを求めるには，複数の初期点から解を求める必要がある．

3. 提案手法

関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ における非単調直線探索では，点 x^k と探索方向 d^k に対してステップ幅は

$$f(x^k + \alpha_k d^k) \leq c_k + \delta \nabla f(x)^\top d^k$$

を満たす $\alpha_k > 0$ とする．ここで，c_k には過去有限個の関数値の最大値や過去すべての関数値の加重平均値などが用いられている．まず，これら二つの手法を多

目的最適化問題に拡張した手法を考える．

点 x^k と探索方向 d^k に対してステップ幅は，すべての $i=1,\dots,m$ に対して次の式を満たす $\alpha_k>0$ とする．

$$F_i(x^k+\alpha_k d^k) \le C_i^k + \delta \nabla F_i(x^k)^\top d^k \qquad (3)$$

ここで，C_i^k を以下のように決める．

提案手法 1：最大値型　M: 非負の整数

$$C_i^k = \max_{0\le j\le \min\{k,M\}} F_i(x^{k-j}) \qquad (4)$$

提案手法 2：加重平均型　$\eta \in [0,1)$

$$C_i^k = \frac{1}{\sum_{j=0}^k \eta^j} \sum_{j=0}^k \eta^j F_i(x^{k-j}) \qquad (5)$$

上記二つの提案手法は，単一目的最適化に対する非単調直線探索をそのまま多目的最適化に拡張したものである．次に，目的関数が複数あることを利用した新しい非単調直線探索を考える．

提案手法 3：ハイブリッド型

$1\le m_k\le m$ である整数 m_k を用いて，

$$\#\{i | F_i(x^k+\alpha_k d^k) \le F_i(x^k) + \delta \nabla F_i(x^k)^\top d^k\} \ge m_k$$

かつ，すべての $i=1,\dots,m$ に対し，式 (4) または式 (5) を用いた条件 (3) を満たす α_k を選ぶ．

4. 大域的収束性

提案手法の大域的収束性を示すために，探索方向に関する次の仮定を考える．

仮定 4.1. $\Theta(\cdot)$ を次のように定義する．

$$\Theta(x) = \min_{d\in\Omega - x} \max_{i=1,\dots,m} \left\{ \nabla F_i(x)^\top d + \frac{1}{2}\|d\|^2 \right\}$$

このとき，十分大きいすべての k に対し，次の二式を満たす定数 $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0$ が存在する．

$$\max_{i=1,\dots,m} \{\nabla F_i(x^k)^\top d^k\} \le -\Gamma_1 |\Theta(x^k)|$$
$$\|d^k\|^2 \le \Gamma_2 |\Theta(x^k)|$$

定理 4.1 [2]**.** 仮定 4.1 が成り立つとする．このとき，提案手法 1〜3 でそれぞれ生成される点列 $\{x^k\}$ の集積点はすべてパレート停留点である．

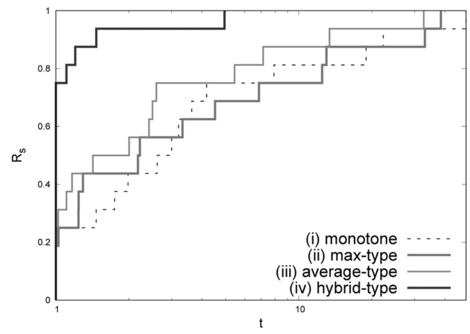

図 1　パフォーマンスプロファイル

命題 4.1 [2]**.** すべての i とパレート停留点に十分近い x に対して B_i の最大固有値 $\lambda_{\max}$ と最小固有値 $\lambda_{\min}$ が存在するとき，方向 $d^*(x)$ は以下の式を満たす．

$$\max_{i=1,\dots,m}\left\{\nabla F_i(x)^\top d^*(x)\right\} \le -\frac{1}{\beta}\frac{\min\{1,\beta^2\}}{\max\{1,\lambda_{\max}\}}|\Theta(x)|$$
$$\|d^*(x)\|^2 \le \frac{2}{\lambda_{\min}}\frac{\max\{1,\beta^2\}}{\min\{1,\lambda_{\min}\}}|\Theta(x)|$$

よって，探索方向 $d^*(x^k)$ は任意の $\beta>0$，正定値行列 B_i，閉凸集合 Ω に対して仮定 4.1 を満たす．したがって，最急降下方向，ニュートン方向，射影勾配方向を用いた提案手法 1〜3 はパレート停留点に収束する．

以上の結果は，同時期に提案された加重平均型の射影勾配法や最大値型の降下法をすべて含み，かつ多目的ならではの新たな手法であるハイブリッド型が加わった手法に対する大域的収束性を示している．

5. 数値実験

最後に，数値実験の結果を示す．多目的最適化問題のテスト問題 16 題 [3] を，最急降下方向を用いて，既存手法と提案手法 1〜3 の 4 種類の直線探索で解いた．関数の評価回数をパフォーマンスプロファイルで比較した結果が図 1 である．既存手法に比べ提案手法が同等または優れており，その中でもハイブリッド型が最も優れた結果となったことがわかる．

参考文献

[1] E. H. Fukuda and L. M. G. Drummond, "A survey on multiobjective descent methods," *Pesquisa Operacional*, **34**, pp. 585–620, 2014.

[2] K. Mita, "Nonmonotone descent methods for multiobjective optimization problems," Master's thesis, Kyoto University, 2019.

[3] K. Mita. E. H. Fukuda and N. Yamashita, "Nonmonotone line searches for unconstrained multiobjective optimization problems," *Journal of Global Optimization*, pages 1–28, 2019.