

線形計画法の歴史

今野 浩

キーワード：単体法，内点法，線形計画法のバイブル，整数線形計画問題，CPLEX

1. 線形計画法誕生

多数の一次等式・不等式制約のもとで，一次式を最大化（もしくは最小化）する線形計画問題を研究する線形計画法が誕生したのは，米国防総省の応用数学部門に勤める G. Dantzig が，制約領域（凸多面集合）の互いに隣接する頂点をたどる単体法を考案した 1947 年である。

線形計画問題については，Dantzig 以前にもさまざまな研究が行われていた。たとえば 5 年前の 1942 年には，ソ連の L. Kantorovich が，輸送計画問題に関する論文を発表している。

1949 年に計量経済学者 T. Koopmans が主宰した線形計画法シンポジウムには，K. Arrow, R. Dorfman, L. Hurwicz, T. Koopmans, J. Marschak, O. Morgenstern, P. Samuelson, H. Simon などの経済学者と，G. Dantzig, D. Gale, H. Kuhn, A. Tucker などの数学者が顔を揃えた。

ここで発表された研究をもとに Koopmans が編集した *Activity Analysis of Production and Allocation* [1] は，経済学，応用数学，統計学など広範な研究者の関心を集めた。

線形計画法の研究は，この後ランド・コーポレーションの Dantzig グループ（主として単体法の効率化に関する研究），プリンストン大学の Tucker グループ（数学的構造とゲーム理論に関する研究），カーネギー・メロン大学の A. Charnes グループ（産業への応用研究）などによって精力的に進められた。

Dantzig が 1963 年に上梓した，632 ページに及ぶ *Linear Programming and Extensions* [2] には，単体法から始まって，双対理論，感度分析，ゲーム理論，輸送問題，有界変数法，分解原理，ネットワーク・フロー問題，2 次計画問題，凸計画問題，整数計画法，不確定性下の線形計画法など，さまざまテーマが扱われている。

巻末に記載された 600 編を超える論文（うち約 40 編

は著者自身によるもの）を見ると，15 年の間に膨大な研究が行われたことがわかる。

Dantzig のテキストは，ドイツ語，フランス語，ロシア語など 7 カ国で翻訳され，線形計画法の普及に大きく貢献した。一方日本語訳が出版されたのは 1988 年，原著が出てから 25 年後である。（もっと早く出ていればよかった，と悔やまれる。）

日本でも少数ながら，線形計画法について研究している人はいた。伊理正夫，竹内啓，渡辺浩，倉田令二郎教授らである。しかし Dantzig の本の参考文献に記載されているのは，伊理教授による 1 編だけである。

筆者は 60 年代半ばに，これらの先生方が集まる研究会に出席したことがあるが，そこでは極めてレベルが高い議論が行われていた。研究会メンバーの誰かが，ここでの議論をもとにした論文を *Operations Research* や *Management Science* など，海外のジャーナルに投稿していれば，日本は 20 年早くこの分野で認知されていたのではなかろうか。

2. 単体法の効率化

単体法は，ガウスの消去法を用いたシンプルな方法である。学生時代に，わが国における線形計画法のバイオニアである森口教授の手ほどきを受けた筆者は，電力中央研究所に入所して間もなく，Dantzig のバイブルを手にしたとき，こんなにたくさん書くことがあるのかと訝った。

ところが，実用上の大型問題を解くためには，問題の特殊構造を活かしたさまざまな工夫が必要なのである。バイブルの参考文献リストに記載された論文のかなりの部分は，これらの工夫を扱ったものである。

最初に解かれた（当時としては）大型の線形計画問題は，G. Stigler が 1945 年に提案した主婦の問題である。「スーパー・マーケットで売られている 77 種の食料品の中から，どれをどれだけ購入すれば，家族の健康維持に必要な 9 種類の栄養素を充足する最も安上がりな食料品セットが求まるか」という問題が，単体法が提案された直後の 1947 年に，手回し計算機を使って，120 人・日で解かれている。

この後計算法の改良と計算機の性能向上に伴って、10年ごとに10倍大きな問題が解けるといって、10年で10倍の法則が30年にわたって続いた。

10倍大きな問題を解くためには、通常数千倍ないし一万倍の計算量が必要になる。ムーアの法則に従って、計算機が3年で4倍速くなったとしても、10年間で100倍程度しか速くならない。残りの100倍は計算手法の改善によるものである。

1950年代には数百変数、60年代には数千変数、そして70年代に入ると数万変数の問題が解けるようになった。この頃になると先進的企業の多くが、生産計画や配送計画などに線形計画法を利用するようになった。

1976年に公開され、アカデミー賞で4部門の賞を獲得した『ネットワーク』という映画の中には、大物財界人が、「現在の大企業を動かしているのは線形計画法である。アメリカの大企業だけではない。ソ連の指導部は、今やマルクス経済学ではなく、線形計画法を使って政策を決めている」と発言するシーンがある。

ことほど左様に、線形計画法は企業や政府に普及していたのであるが、この頃になると二つの疑問が浮上した。一つは、「これ以上大きな問題を解く必要はあるのか」という疑問。もう一つは、「単体法の改良はこれから先も可能か」という疑問である。

筆者がDantzig教授のもとで博士論文に取り組み始めた1970年代初め、線形計画法の研究には閉塞感が漂っていた。「線形計画法の父」と呼ばれるDantzig教授は、一般有界変数法に関する1966年の論文を最後に、線形計画法に関する論文を発表しなかったし、経済学者たちは「線形計画法は終わった」と公言していた。

3年に1回開かれる国際数理計画法シンポジウムでも、線形計画法に関する研究発表はめっきり少なくなった。しかしDantzig教授は、M. Saundersらと大型問題を解くためのソフトウェア「MINOS」の開発に取り組んでいた。

巡回セールスマン問題など、難しい組合せ最適化問題や、不確定性下の最適化を解くうえで、より大規模な線形計画問題を解くことが必要になる、と考えていたからである。

3. 線形計画法と経済学

冒頭で紹介したとおり、1949年に開催された線形計画法シンポジウムには、後にノーベル経済学賞を受賞するArrow, Hurwitz, Samuelson, Simonなど、大物経済学者が顔を揃えた。そして50年代から60年代初めにかけて、応用数学者と経済学者が協力して、線形

計画法の研究が進められた。

ところが60年代半ばになると、経済学者は線形計画法に関心を示さなくなった。潜在価格理論、ゲーム理論、Leontiefの産業連関分析との関連で、線形計画法に関心を抱いた経済学者は、この種の研究が一段落したところで、経済学としての線形計画法は終わったと考えたのである。

スタンフォード大学のOR学科で、線形計画法を勉強していた筆者に向かって、新進経済学者（後の大物経済学者）佐和隆光京大助教授は、「今頃から線形計画法の研究をやって、どうなるのでしょうか」と発言している。今であれば、「日本の経済学は結局何も生み出さなかったですね」と言い返すところであるが、このときは黙って聞き流すしかなかった。

1975年のノーベル経済学賞が、「希少な資源の最適配分に関する研究」、すなわち線形計画法における貢献に対して与えられたとき、受賞者はKoopmansとKantorovichの2人だけで、線形計画法における最大の功績者であるDantzigが選考から漏れてしまった。

ノーベル賞を逃して臍をかんだ研究者は大勢いる。しかしその大半は3番手、4番手の研究者であって、第一人者が外されたのは、（筆者が知る限り）後にも先にもこのときだけである。

賞が発表されたとき、筆者はウィーンにある国際応用システム研究所に勤めていたが、Dantzig教授の後任として方法論プロジェクトのリーダーを務めていたKoopmans教授の当惑は超ド級だった。

一時は受賞辞退も考えたということだが、受賞式における「ジョージとともに受賞できなかったことは生涯の痛恨事だ」という涙下るスピーチは、後々までの語り草になった。

受賞式に招かれたDantzig教授は平静を装っておられたが、数理計画法の研究者は切歯扼腕した。またArrow, Samuelsonなどの経済学者も、この選考に対して強い疑義を表明している。

なぜ線形計画法の第一人者が外されたのか。筆者が到達した最終結論は、経済学者集団が「単体法の考案・効率化や生産現場への応用研究は経済学ではない」と判断したからだ、ということである。

4. 内点法革命

単体法は、ほとんどすべての線形計画問題を速く解くことができる。ところがV. KleeとG. Mintyは、最も勾配が急な方向に進むDantzigルールを採用すると、最適頂点に到達するまでに、凸多面体のすべての

頂点をたどる問題が存在することを示した。

それではどのような問題に対しても、効率的に（入力データの多項式オーダーの計算量で）最適解を生成する方法は存在するだろうか。このような解法が存在することは、1979年にL. Khachiyanによって示された。ところがこの方法すなわち楕円体法は、実用的には単体法より効率が悪かった。

ここに登場したのが、AT&Tベル研究所のN. Karmarkarが1984年に発表したアフィン変換法である。

これは多面体の縁をたどる単体法と違って、多面体の内部を進む方法である。このような方法は60年代にも提案されていたが、実際の問題に当てはめると、単体法には勝てないことがわかった。それ以来、線形計画法の世界では、「急がば回れ」の単体法が不動の王座を維持してきたのである。

Karmarkarは、「従来の方法より100倍速い解法の出現によって、新しい時代の幕が開いた」と豪語する一方で、計算実験結果の公開を拒否し、アフィン変換法を特許申請するなど、学界のスタンダードに反する行動をとったため、厳しい批判を浴びた。

Karmarkar法が登場したとき、またアメリカで特許が成立したとき、日本でも大新聞が一面で報道している。（日本で数学について一面で報道されたのは、4色問題が解かれたときとフェルマーの定理が証明されたときだけである。）

1986年にKarmarkarが、(Dantzigの弟子である)I. Adlerらと協力して作成したソフトが、Dantzigグループが10年がかりで作成した単体法ソフト「MINOS」を打ち負かして以来、史上まれにみる研究競争が始まった。

このような状況のなか、AT&Tベル研が1989年にリリースした890万ドルのソフト「KORBX」が、7万制約式・50万変数という超大型問題を解くことに成功したと報じられ大評判になった。

ところがその1年後に、このソフトは3人の大学教授が経営するXMP社が発売した5万ドルのソフト「OB1」によって、市場から駆逐されてしまった。なおOB1で使われたのは、1987年に東工大の小島教授グループが発表した主・双対内点法である。（小島教授グループは、この功績でランチェスター賞を受賞している。）

この当時、線形計画法ソフトとして最も人気が高かったのは、ライス大学のR. Bixbyが開発した単体法ソフト「CPLEX」である。Bixbyは、新時代のプログラミング技術を使って、過去に提案されたが埋もれて

いた、単体法の改良に関するさまざまなアイデアを風潰しに調べ上げたという。

単体法は当初Dantzigが予想したよりはるかに効率的だった。しかし、たくさんある隣接頂点の中のどれを選べば最も早く最適頂点にたどり着けるか、またどのような方法で次の頂点を計算するのがベストかなど、よくわかっていないことが多かったのである。

Bixbyの超人的努力は実り、1988年に発売されたCPLEX1.0から始まって、矢継ぎ早にリリースされるこのソフトは、90年代に入ると、単体法ソフトの王座を獲得した。ところが数年後に、主・双対内点法を用いたOB1に王座を奪われてしまった。

ただしKORBXと違って、CPLEXは市場から駆逐されなかった。なぜなら単体法は

- ・ 数万変数規模の問題であれば十分早く解くことができる
- ・ 制約条件や目的関数を少々変更した問題の最適解を手軽に計算することができる

などの長所をもっているからである。一方の主・双対内点法は、100万変数を超える問題に対してはCPLEXより速いが、制約条件や目的関数を少々変更すると、はじめから解き直さなければならない。

OB1とCPLEXの死闘は何年も続いた。十数年前に輸送問題を巡ってネットワーク・アプローチを用いた組合せ的な解法と、単体法の間で熾烈な戦いが繰り広げられたことがあるが、今回の闘いはそれを上回るデッドヒートだった。

ところがこの後しばらくして、XMP社はBixbyが経営するCPLEX社にOB1を売り渡して解散してしまった。

単体法と内点法を“いいとこ取り”して生まれた新・CPLEXは、王座を取り戻した。その後も次々と改良を続けたCPLEXは、大型の線形計画問題を解くうえで、欠かせない道具になった。また大型の線形計画問題が速く解けるようになったおかげで、大型の整数計画問題も速く解けるようになった。

松井知己教授（東工大）は10年ほど前に、「整数線形計画問題として定式化される問題は、3000変数程度までであれば、何も考えずにCPLEXに解かせればよい」と言っていたが、今では1万変数の問題でも、CPLEXはやすやすと答えを出してくれるようになった。

2002年の*Operations Research*に発表された“現実の線形計画問題の解法：この十数年の進歩”と題する論文[3]の中で、BixbyはCPLEX改良の軌跡を振り返った後、次のように書いている（筆者訳）。

ここ 15 年の間に、計算機の処理能力が 1000 倍になり、計算手法の改良によって約 2000 倍のスピードアップが実現された。この結果、線形計画問題は 200 万倍速く解けるようになった。10 年前には 1 年を必要とした計算が、今では 30 秒で終わるようになった（中略）。

このような進歩が具体的に何を意味するのか、まだよくわからない。しかしそれは現実なのである。いまやわれわれは、たった数年前の最新技術を無力化するような最適化エンジンを手に入れた。この結果、かつては絶対に解けないと思われていた問題が解けるようになり、新しい応用分野は限りなく広がった（後略）。

線形計画問題や整数計画問題が 200 万倍速く解けるようになったため、超大型の最適化問題が日常的に解かれるようになった。Bixby はある大手企業のサプライ・チェーン最適化問題を 1900 万変数、1000 万制約式の整数計画問題として定式化して CPLEX で解いたところ、在庫コストが 20%削減されたと報告している。なおこの問題は、普通のワークステーション上で 90 分で解けたということだが、誕生以来 60 年間の進歩は驚異的というほかない。

線形（整数）計画ソフトはその後も着実に進化を続けているから、Bixby 論文から 15 年を経た現在では、この 10 分の 1 以下の時間で解けるのではないだろうか。

『ネットワーク』という映画で「世界を動かしているのは線形計画法だ」というセリフを耳にしたとき、「少々誇張が含まれている」と感じた 35 歳の筆者は、その後四半世紀を経て、本当にそのような時代が来たことを実感した。1984 年に Karmarkar が「新しい時代の幕が開いた」と宣言したとおりの結果になったのである。

このような技術進歩が実現されたのは、誰もが自由に他人の研究成果を利用することができたからである。

Karmarkar のアフィン変換法特許申請に対して、大半の研究者が、「数学には特許を与えるべきではない」、「そもそもアフィン変換法には新規性がない」という理由で反対したにもかかわらず、アメリカ特許商標庁は 1988 年に特許を認可した。（1993 年には日本でも特許が成立している。）

この後、さまざまなビジネスモデル特許が生まれた。「なんでも特許」の時代がやってきたのである。筆者は数値計画法の進歩が阻害されるのではないかと心配し

たが、これは杞憂だった。Karmarkar 特許が成立した後も、数値計画法の世界では従来どおり他人の研究成果を利用できる状態が維持されたのである。

今では線形計画法は、現実の最適化問題を解くうえで必須の道具になった。それだけではない。線形計画法はさまざまな新しい研究分野を生み出した。

整数計画法、非線形計画法、半正定値計画法をはじめ、データ・マイニング、サポート・ベクター・マシン、DEA（データ包絡線分析）などは、線形計画法を土台として築かれたものである。また、凸解析、多面体の幾何学的構造の研究など、新しい数学理論が生まれた。

学生時代の筆者は、「線形計画法は理論的にはシンプルだが、計算はととても厄介だ」と考えていた。しかし 45 年後の今は、「線形計画法は理論的に奥が深く、計算はととても複雑だ」と考えている。

5. 線形計画法と過ごした半世紀

筆者が線形計画法の存在を知ったのは、大学 2 年生のとき、すなわち 1960 年である。大学に入って線形代数学で苦勞していたところに、森口教授の線形計画法に関する 10 分間のプレゼンテーションを聞いて、社会的な問題を線形代数学で解決する線形計画法の虜になった。

数理工学コースに進学した筆者は、制約式が 7 本、変数が 13 個の演習問題を与えられた。タイガーの手回し計算機しかない時代だから、7 元連立 1 次方程式を 1 回解くだけで 20 分以上かかる。最適解を求めるためには、10 回以上“掃き出し計算”を実行しなければならない。最適解らしきものが求まっても、それが正しいかどうかを確認するのも容易ではなかった。

線形計画法について本格的に勉強したのは、1968 年にスタンフォード大学に留学してからである。Dantzig 教授の線形計画法の講義の教科書は、電力中央研究所時代に手に取ったが、数十ページしか読めなかった 630 ページのバイブルである。単位を取得するためには、60 回の講義（1 回 50 分）でバイブルの 3 分の 2 をカバーするレクチャーを受けたくて、180 時間分の宿題を解かなければならない。

博士資格試験をパスするため、筆者はバイブル全巻を脳みそに叩き込んだ。全巻を隅から隅まで読んだ日本人は、筆者とこの本を翻訳した小山昭雄教授だけだろう。（ちなみに森口教授は、1971 年時点でバイブルの存在をご存じなかった！）

これだけ勉強すれば、線形計画法に関する“わかった

感覚”が手に入る。ところがこの頃線形計画法は“終わっていた”と思われていた。誕生後四半世紀の間に、Dantzig 教授をはじめとする天才たちが掘り尽くしたため、線形計画法鉱山は空になっていたのである。

この後筆者は線形計画法そのものの研究を諦め、その延長線上にある**双線形計画問題**に取り組んだ。ところがこの問題は、悪名高い**NP 困難問題**の一つだった。数年間この問題と格闘した後、この研究から撤退し、**整数計画問題**にシフトした。

いくつかのアイデアは浮かんだが、パソコンがない時代だから、その実用性を検証することはできなかった。言ってみれば、フレンチ・レストランで失敗した男が、イタリアン・レストランを開いてまたまた失敗したようなものである。

再び線形計画法に戻ってきたのは 1982 年、筑波大から東工大に移ってからである。折からこの翌年に V. Chvátal の名著 *Linear Programming* [4] が出版されたのを機会に、新時代の線形計画法をじっくり勉強した。

線形計画法に関しては、これまで無数の教科書が出版されているが、Dantzig のバイブルを旧約聖書に譬えれば、この本は新約聖書というべき名著である。(旧約聖書と違って、出版後まもなく日本語訳が出ている。)

この後 1998 年には、A. Schrijver のハイレベルな教科書 [5] が出ているが、あれこれ忙しかったためこの本を熟読することはできなかった。

旧約聖書と新約聖書を読破した筆者は、これ以後の研究者生活を線形計画法とともに過ごすことになった。その手始めは線形計画法に関する本格的な教科書を書くことである。Chvátal の訳書があれば十分ではないか、という思いもあったが、600 ページもある教科書を読破できる学生は少ない。

アメリカと違って、日本の教科書は高々 300 ページが限度である。単体法に始まり、双対理論、双対単体法、単体法の幾何学、大型線形計画問題、ゲーム理論と線形計画、2 次計画法、分数計画法と多目的最適化、Karmarkar 法などを扱った全 265 ページの教科書『線形計画法』[6] は、その 8 年前に出した『非線形計画法』[7] と並んで 1 万部以上を売り上げた。

ところが多忙にかまけて改訂作業を怠ったため、今ではどちらも絶版になってしまった。出版されたときに急発展中だった内点法に関する記述が不十分だったことが悔やまれる。

80 年代半ば以来筆者は四半世紀にわたって、大域的最適化法と金融工学(資産運用理論)の研究に取り組んだが、そのとき役に立ったのは 2 冊のバイブルで学

んだ線形計画法の知識だった。

最後に、筆者が取り組んだ研究の中で、線形計画法と関係があるものを列挙しておこう。

- ・東工大の一般教育グループを悩ませてきたクラス編成問題を線形計画法で解決したこと [8, 9]. 今でもそうだが、文系集団は線形計画法という優れたものがあることを知らない。だから、線形計画法で簡単に解ける問題が、そのまま放置されているケースが多いのではないだろうか。
- ・(NP 困難な) 双線形計画問題の 1 種である線形乗法計画問題に対して、パラメトリック単体法を用いた効率的解法を提案したこと。
- ・Markowitz の平均・分散モデルのバリエーションとして、平均・絶対偏差モデルを提案したこと。このモデルを使えば、実際の資産運用の場で出現するさまざまな厄介な条件(最小取引単位制約、銘柄数制約などなど)を効率的に取り扱うことができる。
- ・Karmarkar の線形計画法特許の新規性のなさを訴えて、6 年にわたって東京高裁で戦ったこと。特許の無効化には成功したものの、裁判では敗訴した [10].

これ以外の論文や報告書の中にも、線形計画法と関連したものが多い。

なお線形計画法に関するより詳細な歴史については、『ヒラノ教授の線形計画法物語』[11] を参照していただきたい。

参考文献

- [1] T. C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley & Sons, 1951.
- [2] G. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, 1963.
- [3] R. Bixby, “Solving real-world linear programs: A decade and more of progress,” *Operations Research*, **50**, pp. 3–15, 2002.
- [4] V. Chvátal, *Linear Programming*, Freeman & Co., 1983. (阪田省二郎, 藤野和健訳, 『線形計画法, (上)・(下)』, 啓学出版, 1986, 1988.)
- [5] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons, 1998.
- [6] 今野浩, 『線形計画法』, 日科技連出版社, 1987.
- [7] 今野浩, 山下浩, 『非線形計画法』, 日科技連出版社, 1978.
- [8] 今野浩, 後藤順哉, 『意思決定のための数理モデル入門』, 朝倉書店, 2011.
- [9] 今野浩, 『数理決定法入門 キャンパスの OR』, 朝倉書店, 1992.
- [10] 今野浩, 『特許ビジネスはどこに行くのか』, 岩波書店, 2002.
- [11] 今野浩, 『ヒラノ教授の線形計画法物語』, 岩波書店, 2014.