

線形計画と最小ノルム点問題

—LP-Newton法について—

藤重 悟

線形計画を最小ノルム点問題と LP-Newton 法から展望する.

キーワード：LP-Newton 法，線形計画，最小ノルム点問題，ゾノトープ

1. はじめに

本特集のオーガナイザから LP-Newton 法について
の原稿執筆の依頼があったが，本特集テーマの線形計
画の大きな研究の流れからすると私の提案した解法は
小さな結果であるので，執筆を躊躇した。しかし，そ
の解法を自分自身は面白いと思っているので，この機
会にその面白さを伝えるために，改めて LP-Newton
法についてまとめておくことは意味があると思い直し
て，執筆をお引き受けした次第である。

LP-Newton 法は，研究対象としてもまだまだやる
べきことがあり，若い研究者に興味をもってもらえれ
ばありがたいし，また，ソフトウェア構築の面からも
実用化サイドの取り組みのきっかけにもなればよいと
思っている。

2. LP-Newton 法の考え方

LP-Newton 法という名称を付けたので，多くの人
たちは，この解法が LP（線形計画）の問題を解くた
めに開発されたと思うであろうが，実はそうではない。
LP-Newton 法の L は直線 (line) を示し，P は凸多面
体 (polytope, polyhedron) を表す。原理的には，こ
こでの凸多面体は一般の凸集合でも LP-Newton 法の考
え方は変わらない。

1 次元スカラー関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ の零点 ($f(x) = 0$ の解
 x) を見つける方法として数値計算の教科書に出てくる
Newton-Raphson 法や，組合せ最適化問題をパラメト
リックに解こうとするときに出てくる Dinkelbach の離
散 Newton 法があり，それらの有効性が広く知られてい
る。LP-Newton 法は，これらの解法の極めて自然な多
次元化として生まれたもので，その原理は簡単である。

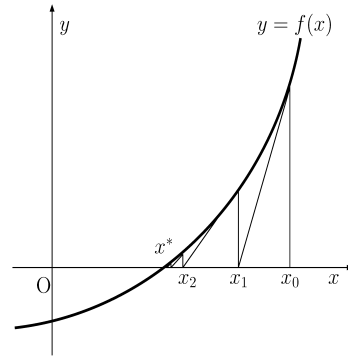


図 1 Newton-Raphson 法

2.1 Newton-Raphson 法

いま，図 1 のような 1 次元スカラー関数 $y = f(x)$
($x \in \mathbb{R}$) が与えられているとしよう。これに対して，
図 1 中の折れ線のように，関数 f の微分を使って関
数 f のグラフ上の点での接線をたどる（すなわち，各
点 x で $f(x)$ を線形近似して，その零点をつぎの x と
する）ようにして，関数の零点 x^* へ収束する点列 x_i
($i = 0, 1, \dots$) を生成する方法が，Newton-Raphson
法と呼ばれる。（これが正しく零点に収束するためには，
たとえば，(初期点) $x_0 >$ (零点) x^* のとき，初期
点 x_0 から零点 x^* までの間で局所的に関数が下にふく
らんだ凸形状になっていればよい。）

さて，与えられた関数 $y = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) のグラフ
(図 1) の上方の領域は f のエピグラフ (epi-graph) と
呼ばれ，これを $\text{epi}(f)$ と表そう (図 2 参照)。 f のエピ
グラフを 2 次元ユークリッド平面上の集合と考えて P
と記し，図 2 のように，初期点 x_0 の P への射影 (x_0 に
最も近い P 上の点) を z_0 とする。つぎに，点 z_0 で P
に接する直線が x 軸と交わる点を x_1 とおき，以下，これを
繰り返す。これによって得られる点列 x_i ($i = 0, 1, \dots$)
が， f の零点 x^* に収束する（この点列を効率的に生
成できるかどうか今は気にしないことにする）。一見し

ふじしげ さとる
京都大学数理解析研究所 特任教授
fujishig@kurims.kyoto-u.ac.jp

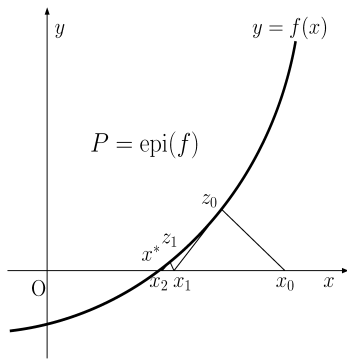


図2 LP-Newton 法

て、こちらの点列 x_i ($i = 0, 1, \dots$) のほうが Newton-Raphson 法の点列よりも早く収束しそうに見える。

この手順の面白いところは、つぎに述べるように容易に高次元化が可能であることである。

2.2 高次元化から LP-Newton 法へ

図2のように点列 x_0, x_1, \dots を生成する手順は、ユークリッド平面上の集合 P と x 軸の直線 L との交わりの端点 x^* を見つけるものである。この手順は、一般の n 次元ユークリッド空間の閉凸集合 P と直線 L が与えられたときに、 P と L の交わり $P \cap L$ の端点 x^* を見つける手順として、以下のように自然に書き下すことができる。 P の外にある L の点 x_0 と、停止条件に関する (小さな) 正数 ϵ が与えられているとする。 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す。

LP-Newton 法

1. $i = 0$ とおく。
2. x_i の P への射影を z_i とおく。 $\|z_i - x_i\| \leq \epsilon$ ならば $x^* \leftarrow x_i$ として x^* を出力する。
3. 点 z_i を通り、法線ベクトル $z_i - x_i$ をもつ超平面を H とする。
4. H と直線 L の交点を x_{i+1} とおく。
5. $i \leftarrow i + 1$ として、ステップ2へ行く。

以上の説明で、LP-Newton 法が、図2での接線が n 次元空間の超平面に置き換えられただけの高次元空間への自然な拡張になっていることがわかるであろう。また、ここでは、 P の境界 (表面) の滑らかさを必要としない、したがって、多面体にもそのまま使える形になっていることにも注意する。多面体の場合、計算誤差のない厳密な実数計算を仮定すれば、 $\epsilon = 0$ として有限な i に対して $z_i = x_i$ となって、端点 x^* を出力する。

上述の LP-Newton 法で問題になるのは、ステッ

プ2における x_i の P への射影であり、これは平行移動して x_i を原点 O に移して表現すれば、(平行移動した) P 上で最小ノルムをもつ点を見いだす問題と同等である。多面体上の最小ノルム点を見いだす問題の解法として、つぎに述べる Wolfe (ウルフ) のアルゴリズムが知られている [1]。

3. Wolfe の最小ノルム点アルゴリズム

ここでは、 n 次元ユークリッド空間の有限個の点 p_i ($i \in I$) の凸包として有界多面体 P が与えられるとする。以下の説明からわかるように、 P を生成する点の全体 $Q = \{p_i \mid i \in I\}$ を陽に手許に記憶してもっている必要はなく、アルゴリズムの途中で必要となる点 $p \in Q$ を効率よく拾うことができればよいことを注意しておく。

非零ベクトル $z \in \mathbb{R}^n$ に対して、点 z を通り、法線ベクトル z をもつ超平面を H_z と表す。さらに、超平面 H_z で定まる、原点を含む開半空間を H_z^- と書くことにする。後ほど、簡単な例で図を使って説明するが、まず、アルゴリズムの概略を述べる。

Wolfe の最小ノルム点アルゴリズム

1. 任意の点 $p \in Q$ を選んで、 $S \leftarrow \{p\}$, $z \leftarrow p$ とおく。
2. $Q \cap H_z^- = \emptyset$ ならば、 z を出力する。
 $Q \cap H_z^- \neq \emptyset$ ならば、任意の点 $p \in Q \cap H_z^-$ を選んで、 $S \leftarrow S \cup \{p\}$ とおく。
3. S のアフィン包の最小ノルム点を y とおく。
 y が S の凸包の相対内点ならば、 $z \leftarrow y$ として、ステップ2へ行く。
4. (y が S の凸包の相対内点でないとき) 線分 \overline{yz} と S の凸包の交わりの点で y に最も近い点を改めて z とおき、 z 含む S の凸包の最小面を生成する、 S の部分集合を改めて S とおく。ステップ3へ行く。

このアルゴリズムでは、ステップ3から2へ戻るサイクルと、ステップ4から3へ戻るサイクルがあるが、前者を主サイクル、後者を小サイクルと呼ぶ。アルゴリズム実行中に得られる点集合 S は、アフィン独立であって、単体 (simplex) とも呼ばれる。

- ・各小サイクルでは、 S のサイズが少なくとも1減少するので小サイクルの連続する繰り返しは高々 n 回である。そして、ステップ3と4において z が更新されるごとに、 z のノルムは正味減少する。
- ・一方、ステップ2の初めに得られている単体 S は、

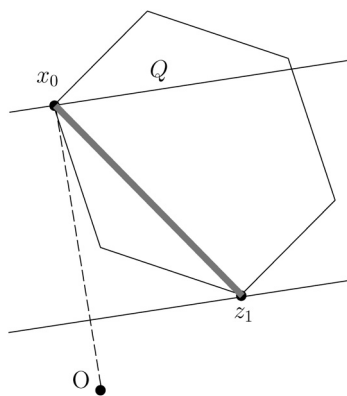


図3 Wolfe のアルゴリズム (a)

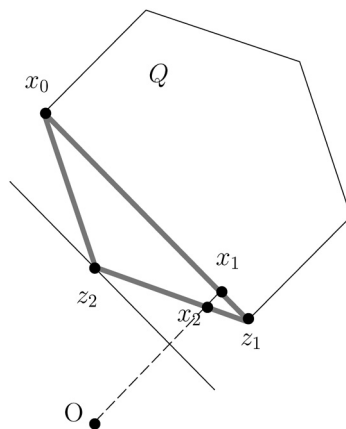


図4 Wolfe のアルゴリズム (b)

「そのアフィン包の最小ノルム点が S の凸包の相対内点である」という性質をもっている (Wolfe はこのような S をコラル (corral) と呼んでいる; 1 点からなる S は常にコラルであることに注意).

上記二つの事実から, 同一のコラル S が現れることはない. また, コラル S の可能な個数が有限 ($< 2^n$) であることから, 上述の Wolfe のアルゴリズムの有限収束が証明される. さらに, アルゴリズム終了時に $Q \cap H_{\bar{z}} = \emptyset$ を満たす $z \in P$ は, P の最小ノルム点であることに注意する.

ところで, 先送りしていた注意点であるが, ステップ 3 での点 $p \in Q \cap H_{\bar{z}}$ の選び方としては, 超平面 $H_{\bar{z}}$ の法線ベクトル z を係数にもつ線形目的関数を考えて, これを最小にする Q の点を p として選ぶことができる. また, $Q \cap H_{\bar{z}} \neq \emptyset$ か否かの判定も同様に, 線形目的関数最小化で実行できる.

このようにすれば, Q の凸包上の線形関数最小化が効率よく実行できるような多面体 P であれば, Q を構成する P の端点の個数がたとえ指数関数的に大きくても Q を陽にもつ必要はなくて, Wolfe のアルゴリズムを使うことができる. 次節で説明する線形計画への LP-Newton 法で出てくるゾノトープは, そのような例である. また, 劣モジュラ関数最小化への応用で出てくる基多面体も線形関数最小化が容易にできる多面体であって, Wolfe のアルゴリズムを使って劣モジュラ関数最小化が実行できる [2-4]. さらに, 永野 [5] によって考察された基多面体と直線の交わりの問題にも使える.

例 1. 図 3 の 6 角形の 6 個の端点からなる集合 Q を考える. この Q の凸包 P (6 角形) の最小ノルム点を見つける Wolfe のアルゴリズムの振る舞いを見てみよう. いま, 厳密な実数計算を仮定する.

ステップ 1: 初期点として Q から 1 点 x_0 を選び, $S = \{x_0\}$ とおく (図 3) (1 点からなる S はコラルである). $z \leftarrow x_0$ とおく.

ステップ 2: $Q \cap H_{\bar{z}} \neq \emptyset$ なので, $z = x_0$ を係数ベクトルとする線形関数最小化の端点 $p = z_1$ を求めて, $S = \{x_0, z_1\}$ とおく (図 3).

ステップ 3: S の生成するアフィン空間の最小ノルム点 $y = x_1$ を求める. この x_1 が S の凸包 (線分 $\overline{x_0 z_1}$) の相対内点であるから, $z \leftarrow x_1$ としてステップ 2 へ (図 4).

ステップ 2: $Q \cap H_{\bar{z}} \neq \emptyset$ なので, コラル S の最小ノルム点 $z = x_1$ を係数ベクトルとする線形関数最小化の端点 $p = z_2$ を求めて, $S \leftarrow S \cup \{z_2\}$ とおく (図 4).
ステップ 3: S のアフィン包は 2 次元平面全体となり, その最小ノルム点は原点 O である. 原点 O が現在の S の凸包 (三角形 $x_0 z_1 z_2$) の内部にないので, ステップ 4 へ (図 4).

ステップ 4: 原点 O と x_1 を結ぶ線分上で原点 O に最も近い S の凸包の点 x_2 を求め, 点 x_2 を含む S の凸包の最小面を定める S の部分集合 $\{z_1, z_2\}$ を改めて S とおく. そして, ステップ 3 へ行く (図 5).

ステップ 3: S のアフィン包の最小ノルム点 $y = x_3$ を求める. この x_3 が S の凸包である線分 $\overline{z_1 z_2}$ の相対内点であるから, $z \leftarrow x_3$ としてステップ 2 へ (図 5).
ステップ 2: 開半空間 $H_{\bar{z}}$ 内に Q の点が存在しないので, 現在の点 $z = x_3$ が Q の凸包 P 中の最小ノルム点である (図 5).

このアルゴリズムでの主要な計算は, ステップ 3 で S のアフィン包の最小ノルム点 y を求めるところである. この S の更新に合わせて実行する基本的な線形計算に

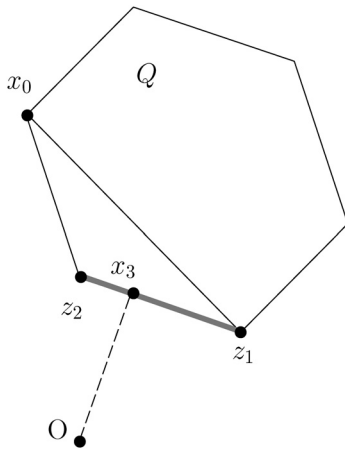


図5 Wolfe のアルゴリズム (c)

については, Wolfe の原論文 [1] 中に, 行列の Cholesky 分解を用いた効率的な更新の手続きが書かれている.

最近, ステップ 2 で「候補の点 $p \in Q \cap H_{\bar{z}}$ の中でノルム最小のものを拾う」とすると最悪, 指数関数的な計算時間が必要になることが示された [6]. しかし, 上記のように線形関数最小化によって点 p を拾う形での Wolfe のアルゴリズムの計算複雑度はまだわかっていないし, 小規模のものではあるが, 実際に使ってみると予想以上に速く動く [2-4]. また, 次節以降で述べるように, LP-Newton 法のサブルーティンとして使う場合には種々の工夫の余地もあるように思う.

4. 線形計画とゾノトープ

いま, A を $m \times n$ の実数行列, $l, u \in \mathbb{R}^n$ を n 次元の列ベクトルとし, $l \leq u$ を満たすとする. そのとき,

$$Z = \{z \mid z = Ax, l \leq x \leq u\}, \quad (1)$$

で定義される $Z \subset \mathbb{R}^m$ は, ゾノトープ (zonotope) と呼ばれる有界凸多面体である. ゾノトープ上での線形目的関数最小化は, つぎに説明するように, 単純な手続きで実行可能である.

任意の m 次元行ベクトル λ に対して,

$$\text{Minimize } \lambda z \quad \text{subject to } z \in Z \quad (2)$$

を考える. これは, (1) より,

$$\text{Minimize } \lambda Ax \quad \text{subject to } l \leq x \leq u \quad (3)$$

と同値であり, 標準的なボックス $l \leq x \leq u$ 上で, λA を係数ベクトルとする線形目的関数最小化である. したがって, その一つの最適解 x^* がつぎのように与えられる. $j = 1, \dots, n$ に対して,

$$x^*(j) = \begin{cases} l(j) & (\lambda a_j > 0 \text{ のとき}) \\ u(j) & (\text{その他のとき}) \end{cases} \quad (4)$$

ここで, a_j は A の第 j 列ベクトルである. よって, $z^* = Ax^*$ は, 線形最小化問題 (2) の最適解である. 以上から, 前節で説明した Wolfe のアルゴリズムがゾノトープに対して適用可能であることがわかる.

さて, つぎのような線形計画問題 (LP) を考えよう.

$$\begin{aligned} \text{(LP) Maximize } \quad & c x = \sum_{j=1}^n c(j)x(j) \\ \text{subject to } \quad & Ax = b, \quad l \leq x \leq u. \end{aligned} \quad (5)$$

通常の線形計画問題の標準形では, $l = 0$ で上限制約がない ($u(j) = +\infty, j = 1, \dots, n$ である) が, ここでは, 有限な上限制約になっており, これによって, 線形計画問題とゾノトープが関係することになる. なお, 有限な上限制約を課すことは実用上も理論上も大きな問題はないが, 上限制約がない場合の LP-Newton 法が, 文献 [7] において示されている.

つぎに, 新たに c を A の第 $m+1$ 行目として付加して, $(m+1) \times n$ 行列

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ c \end{pmatrix} \quad (6)$$

を定義し, それから定まるゾノトープ

$$\bar{Z} = \{z \mid z = \bar{A}x, l \leq x \leq u\}. \quad (7)$$

を考えよう. すると, 実スカラー変数 γ を用いて, 線形計画問題 (LP) が次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} \text{(LP)' Maximize } \quad & \gamma \\ \text{subject to } \quad & \begin{pmatrix} b \\ \gamma \end{pmatrix} \in \bar{Z}. \end{aligned} \quad (8)$$

さらに, 以下のように, 第 $m+1$ 番目の座標軸に並行で, 点 $\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ を通る直線 L を定義する.

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} b \\ \gamma \end{pmatrix} \mid \gamma \in \mathbb{R} \right\}. \quad (9)$$

すると, (8) 式の問題 (LP)' は, 第 $m+1$ 成分が最大となる, (7) のゾノトープ $P = \bar{Z}$ と直線 L の交わりの端点を見つける問題である. したがって, ゾノトープ $P = \bar{Z}$ と直線 L に対する LP-Newton 法によって, 線形計画問題 (LP) を解くことができることがわかる.

最大化問題 (LP) の解を見つけるためには, (9) の L 上の初期点 $\begin{pmatrix} b \\ \gamma_0 \end{pmatrix}$ を適切に (γ_0 を十分大きく) 選ぶ必

算時間がかかる。そこで、その部分がどのように回避可能か考えてみよう。

(a) Wolfe のアルゴリズムを使った LP-Newton 法では、毎回、目標となる L 上の点 \mathbf{x}_i の P への射影 \mathbf{z}_i を求めるが、その計算途中で \mathbf{x}_i と P の“よい”分離超平面が得られたらただちに \mathbf{x}_i の更新をして、つぎのサイクルへ進めばよい。

(b) (Frank-Wolfe 法) Wolfe のアルゴリズムで計算が重くなるのは、実行中に得られるコラル S のサイズが大きくなるときであり、与えられた行列の粗性を利用して計算効率を上げることも考えられるが、容易ではないようである。そこで、コラル S のサイズを 2 に抑えて計算を省略する方法が考えられる。たとえば、図 4 において、コラル S のサイズが 2 になって \mathbf{x}_1 が求められたとき、そのまま続けると S が更新されて S のサイズが 3 になるが、ここで、 $S = \{\mathbf{x}_1\}$ と置き換えて（すなわち、 \mathbf{x}_1 を初期点として再出発して）、端点 \mathbf{z}_2 を求め、 $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{z}_2\}$ とする。このアルゴリズムは Frank-Wolfe 法として知られ、劣モジュラ関数最小化のための基多面体の最小ノルム点の計算に用いて、大規模な問題にも有効であると言われている [9]。この場合、途中の計算は非常に軽くなるが、厳密に最小ノルム点には到達しない収束する無限系列を生成する。しかし、LP-Newton 法では、厳密な最小ノルム点には必要なく、最小ノルム点に十分に近くなって、 L の現在点を十分によく改良する分離超平面が得られたところで、 \bar{Z} 内の点列の生成を打ち切って L 上の点の更新をし、つぎのサイクルへ進めばよい。（また、コラル S のサイズを 2 に限らない適当な小さな定数 $k \geq 2$ で抑えることも考えられる。）

5.3 可変計量の試み

LP-Newton 法に対して、数学的に気になることがある。LP-Newton 法は、与えられた凸多面体（凸集合） P と直線 L の交わりの端点を見つける問題の解法であるが、原問題で考える空間にノルムは不要であり、ユークリッド・ノルムを考える必然性はない。そこで、任意のノルムに対する LP-Newton 法を（原理的には）考えることが可能である。（Wolfe のアルゴリズムも対応するノルムで点列を生成する。）そして、問題なのは、ノルムを変えると、LP-Newton 法で生成する点列が変わることである¹。

たとえば、ユークリッド・ノルムの代りに、正定数 α を用いて次のようなノルム $\|\cdot\|_{(\alpha)}$ を考えてみよう。

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m+1}$ に対して、

$$\|\mathbf{x}\|_{(\alpha)}^2 = \sum_{i=1}^m x(i)^2 + \alpha x(m+1)^2. \quad (13)$$

例 2 の図 6 を使って説明しよう。初期点 $\bar{\mathbf{b}}_0$ はノルムに関係していないが、点 $\bar{\mathbf{b}}_0$ に最も“近い”点 \mathbf{z}_1 は、正定数 α を小さくしていくと、最終的に求めたい最適点 $\bar{\mathbf{b}}^* = \bar{\mathbf{b}}_2$ に近づいていく。このことから、正定数 α を十分小さく設定すると、LP-Newton 法の点の更新は 1 回で終了する。（これについては、比較的小さな問題についてではあるが、計算機実験でも確認している。）正定数 α を小さくし過ぎると数値的に不安定になるので、LP-Newton 法の更新回数増加に応じて、 $\alpha = 1$ から次第に小さくするような可変計量型の LP-Newton 法を考えることもできる。さらに、ノルム $\|\cdot\|_{(\alpha)}$ に対応する Wolfe のアルゴリズムの実行中に α を小さくしていく方法も考えられる。

なお、ユークリッド・ノルムの代りにノルム $\|\cdot\|_{(\alpha)}$ を考えることは、式 (5) の問題 (LP) において、目的関数の係数ベクトルを $\mathbf{c} \leftarrow (1/\sqrt{\alpha})\mathbf{c}$ と変更して、ユークリッド・ノルムを考えることと同値である。これによってももちろん原問題 (LP) の解は不変であるが、LP-Newton 法で生成する点列が変わる。これをどう考える（解消する）べきか、今後の課題の一つである。

5.4 その他の試み

式 (7) のゾノトープ \bar{Z} の面 (face) は、標準的ボックス $\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$ の上下限の値に変数 \mathbf{x} の成分を固定することで決まる。（非）線形計画法で通常考えられているような制約式の active set を確定させるアプローチで、最適点 $\bar{\mathbf{b}}^*$ を含むゾノトープ \bar{Z} の面を探して早めに確定し、問題の規模を小さくする方法も試してみる価値がある。

6. LP-Newton 法の系譜

Wolfe の最小ノルム点アルゴリズムを使った劣モジュラ関数最小化について最初に公表したのは、ドイツに長期出張中の 1983 年 1 月に開催された Oberwolfach のワークショップである（その論文版が [10]）。帰国後、筑波大学の学生諸君と、各種の劣モジュラ関数の最小化に対して Wolfe のアルゴリズムを使って、計算機実験によってその実際的な有効性を確かめた。一方、Wolfe のアルゴリズム自体にも興味があって、その変種や一般化に関する一連の研究を行った [8, 11–13]。当時の関連研究として、論文 [14] や解説 [15] もある。私が 1997 年に阪大へ転任してしばらくして、ソフト

¹ 恩師の故伊理正夫先生からお叱りを受けそうな問題点であるが、ノルム選択の自由度を活かすことも考えられる。

ウェアの構築に関して高い技術をもつ日系ブラジル人の磯谷シゲオ君が JICA の研修生として来てくれて、助けられた。彼には、後に私が数理解析研究所へ転任したときにも一緒に移ってもらって、仕上げは彼の帰国後になってしまったが、論文 [2, 4] としてまとめられた。

上記論文 [11] の採録までに 4 年以上を要したが、その論文中的のアフィン空間が 1 次元（直線）の特殊な場合が、LP-Newton 法の対象となる P と L の交わりの問題である。LP-Newton 法については、数理解析研究所の修士課程の学生（林君と山下君）と数理解析研究所に滞在した Zimmermann 氏との共同研究 [2, 3] として公表している。その後、LP-Newton 法を気にしながら現在に至っている。最近の関連研究として [16] もある。

7. おわりに

5 節で述べた修正の試みについては、自分で気になりながらまだ十分な検証ができていない。関心をもった人は実装を試みられたい。MATLAB を使えば、Wolfe のアルゴリズムならびに線形計画に対する LP-Newton 法の実装はそれほど難しくはないので、学生向けの実習にも使えるかと思う。また、卒論や修論の研究としても十分楽しめるテーマである。そして、実用的にも使えるアルゴリズムとして仕上がる可能性も十分にあると思っている。

さらに、長年の研究課題である線形計画問題の強多項式時間可解性の解明に向けて、LP-Newton 法のアプローチが有効であるのではないかと密かな期待をもって研究を続けている。

参考文献

[1] P. Wolfe, “Finding the nearest point in a polytope,” *Mathematical Programming*, **11**, pp. 128–149, 1976.
 [2] S. Fujishige, T. Hayashi and S. Isotani, “The minimum-norm-point algorithm applied to submodular function minimization and linear programming,” RIMS Preprint Series No. 1571, 2006.

[3] S. Fujishige, T. Hayashi, K. Yamashita and U. Zimmermann, “Zonotopes and the LP-Newton method,” *Optimization and Engineering*, **10**, pp. 193–205, 2009.
 [4] S. Fujishige and S. Isotani, “A submodular function minimization algorithm based on the minimum-norm base,” *Pacific Journal of Optimization*, **7**, pp. 3–17, 2011.
 [5] K. Nagano, “A strongly polynomial algorithm for line search in submodular polyhedra,” *Discrete Optimization*, **4**, pp. 349–359, 2007.
 [6] J. De Loera, J. Haddock and L. Rademacher, “The minimum Euclidean-norm point on a convex polytope: Wolfe’s combinatorial algorithm is exponential,” In *Proceedings of STOC2018*, pp. 545–553, 2018.
 [7] T. Kitahara, S. Mizuno and J. Shi, “The LP-Newton method for standard form linear programming problems,” *Operations Research Letters*, **41**, pp. 426–429, 2013.
 [8] S. Fujishige and P. Zhan, “A dual algorithm for finding the minimum-norm point in a polytope,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **33**, pp. 188–195, 1990.
 [9] F. Bach, “Learning with submodular functions: A convex optimization perspective,” *Foundations and Trends in Machine Learning*, **6**, pp. 145–373, 2013.
 [10] S. Fujishige, “Submodular systems and related topics,” *Mathematical Programming Study*, **22**, pp. 113–131, 1984.
 [11] S. Fujishige, X. Liu and X. Zhang, “An algorithm for solving the minimum-norm point problem over the intersection of a polytope and an affine set,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, **105**, pp. 113–141, 2000.
 [12] S. Fujishige, H. Sato and P. Zhan, “An algorithm for finding the minimum-norm point in the intersection of a polyhedron and a hyperplane,” *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **11**, pp. 245–264, 1994.
 [13] S. Fujishige and P. Zhan, “A dual algorithm for finding a nearest pair of points in two polytopes,” *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **35**, pp. 353–365, 1992.
 [14] K. Sekitani and Y. Yamamoto, “A recursive algorithm for finding the minimum norm point in a polytope and a pair of closest points in two polytopes,” *Mathematical Programming*, **61**, pp. 233–249, 1993.
 [15] 松井知己, “最小ノルム点問題とその周辺,” 第 5 回 RAMP シンポジウム論文集, pp. 101–112, 1993.
 [16] T. Kitahara and N. Sukegawa, “A simple projection algorithm for linear programming problems,” *Algorithmica*, **81**, pp. 167–178, 2019.