

辞書式二目的最適化による 転回形の選択

軽野 義行

あるコード進行を鍵盤楽器で演奏するとき、そのコード進行に含まれる各コードを、基本形あるいはいずれかの転回形で弾くとする。本稿では、楽器鍵盤の一つ一つの鍵を1台のマシン、コード進行に含まれる各コードを一つのジョブと見て、各ジョブに与えられたマシン部分集合の族の中から適切なマシン部分集合を一つ選ぶ、という最適化問題を考える。得られるマシン部分集合の列に対して、連続する二つのマシン部分集合の共通マシン台数の和を最大にすることを第一目的、また、誘導されるマシン部分列の長さを最小にすることを第二目的とする。定番とされるいくつかのコード進行を取り上げて、モデルの最適解が選んだコードの転回形を紹介する。

キーワード：スケジューリング、ガントチャート、ピアノロール表示、五線譜、コード進行、転回形

1. はじめに

DAW (Digital Audio Workstation) による音楽制作を初心者向けに紹介した雑誌 [1] が、書店で目についた。振り返れば、それが本稿の始まりである。ただし、スケジューリングとの関連性について、なんとなく「ありそう？」くらいは思ったかもしれないが、具体的なテーマがそのときにひらめいたということではない。筆者が学校で音楽を習ったのは中学校までであり、個人的に何か楽器の演奏経験があるわけでもない。当然のことながら、雑誌を購入してはみたものの、その内容をほとんど理解できなかった。

楽譜を読めないとも先に進まないのが、ピアノの演奏経験がある研究室の学生に頼んで、週1回の授業を行ってもらうことにした。また、筆者だけでは心許ないということで、別の学生がもう一人の生徒役を引き受けてくれた。もう一人の生徒に比べて、筆者の理解は明らかに遅かったが、講師の指導が適切であったのだろう（ちなみに、選定してくれた教科書は [2]）、覚悟していたよりも早く、簡単な楽譜を MIDI (Musical Instrument Digital Interface) シーケンスソフトウェアに入力できる（打ち込める）ようになった。

現在の主なシーケンスソフトウェアは、音の開始のタイミングや長さを視覚的に表現できるピアノロール表示機能を持っている [3]。スケジューリングにかかわる者の一人として、このピアノロール表示が、そのも

のと言ってよいくらいガントチャートにそっくりに見えるのである。確かに、五線譜の横軸も時間の経過を表している。時間軸に沿ったマシンとジョブの状態について、通常われわれが考えているスケジュールと同様の何かが、楽譜によっても表されているということを、ピアノロール表示を介することで具体的に意識し始めたように思う。

2. 準備

本稿で紹介する最適化問題では、楽器鍵盤の一つ一つの鍵を1台のマシン、演奏しようとするコード進行に含まれる各コード（和音）を一つのジョブと考えている。なお、この最適化問題はスケジューリング国際シンポジウム 2019 (ISS2019) で発表したもの [4] と同じであるので、あらかじめお断りしておく。図1に楽器鍵盤のレイアウト模式図を、また表1にも、その各鍵へのマシン名（マシン番号）の割当てをまとめておく。

ここで、たとえば、演奏するコード進行として、四つのコードからなる (C, Am, Dm, G) が与えられたとする。最初のコード C を演奏するには、同時に弾く三

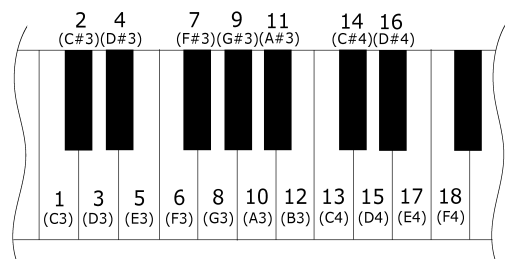


図1 楽器鍵盤のレイアウト [4]

かるの よしゆき
京都工芸繊維大学機械工学系
〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町
karuno@kit.ac.jp

表 1 楽器鍵盤上の各鍵へのマシン名の割当例

マシン名 (マシン番号)	鍵盤上の鍵
マシン 1	C 3
マシン 2	C# 3
マシン 3	D 3
マシン 4	D# 3
マシン 5	E 3
マシン 6	F 3
マシン 7	F# 3
マシン 8	G 3
マシン 9	G# 3
マシン 10	A 3
マシン 11	A# 3
マシン 12	B 3
マシン 13	C 4
マシン 14	C# 4
マシン 15	D 4
マシン 16	D# 4
マシン 17	E 4
マシン 18	F 4

つの鍵として、図 1 の“C3, E3 および G3”, あるいは“E3, G3 および C4”, またあるいは“G3, C4 および E4”など、いくつかの選択肢が考えられる。最適化問題では、四つのコードからなるコード進行を、四つのジョブからなる順序つき集合に対応させる。コード C に対応するジョブ 1 には、それを処理するマシン部分集合の族 $\{\{1, 5, 8\}, \{5, 8, 13\}, \{8, 13, 17\}\}$ が与えられるとする。そして仮に、実際にコード C を演奏するために同時に弾く三つの鍵として“C3, E3 および G3”を選んだとき、ジョブ 1 の処理に、マシン部分集合の族からその最初の部分集合 $\{1, 5, 8\}$ を選択したと考える。

五線譜に表したとき、コードの最下音を根音（ルート）以外の構成音にすることを「転回する」という [5]。転回したときの呼び名は、

- ・基本形（ルートポジション）—最下音が根音のとき
- ・第一転回形 —最下音が第 3 音のとき
- ・第二転回形 —最下音が第 5 音のとき

である。上述の例、すなわち、コード C の演奏のために同時に弾く三つの鍵として候補にあげた、“C3, E3 および G3”, あるいは“E3, G3 および C4”, またあるいは“G3, C4 および E4”は、それぞれ、（構成音の配置を密集配分とした場合の）基本形、第一転回形、第二転回形にあたる。

各コードの演奏において、基本形で弾くのか、あるいはいずれかの転回形で弾くのかの判断は、実際にはど

のようになされるのか。おそらくは、曲全体の何らかも考慮すべきであろうから、まだ筆者にはその全貌がよくわからない。しかし、マシンとジョブに関するある種の最適化という観点では、参考の一つになりそうな記述が文献に発見できる。それは、『転回形は、コード進行の中で、次のコードへの音の流れをスムーズにするために活用される』 [6] (p.25) である。コード進行中のすべてのコードを基本形で演奏するとギクシャク、いくつかのコードを転回することでスムーズ、という趣旨の記述は、他の文献 [7, 8] にも見つけることができる。より具体的な記述例として、『お互いのコードに共通する構成音をつなげるようにすると、とてもスムーズに聞こえる』 [6] (p.25) がある。次節の最適化問題の定式化では、連続する二つのコードに対して、実際に弾く構成音になるべく多くの共通音をもつように、目的関数を設定する。

3. 問題の記述

与えられたコード進行に対して、その中の各コードを基本形で弾くのか、あるいはいずれかの転回形で弾くのかを決定するために、つぎのような辞書式二目的最適化問題を定式化する [4]（辞書式多目的最適化については、例えば、教科書 [9] 参照）。まず、 m 台のマシンの集合と n 個のジョブの集合を、それぞれ、 $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$ と記す。二つの集合 M, N とも、順序つき集合とする。すなわち、 M を長さ m のマシン列として扱うことがあり、また、 $j \in N$ によって第 j 番目に処理されるジョブを表す。

マシン $a \in M$ からマシン $b \in M$ ($b \geq a$) までのマシン部分列を $M[a, b] \subseteq M$ と記す。マシン部分列 $M[a, b]$ の長さは $b - a + 1$ である。定義により、 $M[1, m] = M$ である。各ジョブ $j \in N$ と与えられた正整数 p に対して、 $\mathcal{C}_j = \{S_j(1), S_j(2), \dots, S_j(p)\}$ を空でないマシン部分集合の族とする。すなわち、各 $k = 1, 2, \dots, p$ に対して、 $\emptyset \neq S_j(k) \subseteq M$ である。また、 $M[a_j(k), b_j(k)]$ をマシン部分集合 $S_j(k)$ によって“誘導された”マシン部分列と呼ぶことにする（グラフ理論の分野からは叱られるかもしれないが）。ここで、 $a_j(k) \in M$ はマシン部分集合 $S_j(k)$ における最小インデックスのマシン、 $b_j(k) \in M$ はマシン部分集合 $S_j(k)$ における最大インデックスのマシンを表すとする。定義により、 $S_j(k) \subseteq M[a_j(k), b_j(k)]$ の成立は明らかである。

ここで議論する辞書式二目的マシン部分集合選択問題は、各ジョブに対して与えられているマシン部分集合の族 \mathcal{C}_j から、マシン部分集合一つを選択することを

要求する。繰り返しになるが、この各ジョブに対する一つのマシン部分集合の選択は、あるコードに対して実際に弾く転回形を選ぶことに他ならない。辞書式二目的マシン部分集合選択問題の解を、整数変数ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ によって表す。すべてのジョブ $j \in N$ に対して $x_j \in \{1, 2, \dots, p\}$ を満足するならば、解 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ は実行可能であるとする。実行可能解 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ においては、 $S_j(x_j) \in C_j$ が各ジョブ $j \in N$ に対して選択されたマシン部分集合を表す。

実行可能解 x によって“誘導された”（極小の）マシン部分列を、 $M[a(x), b(x)] \subseteq M$ と表す。ここで、

$$a(x) = \min_{j \in N} \{a_j(x_j)\}, \quad b(x) = \max_{j \in N} \{b_j(x_j)\}$$

とする。定義により、すべてのジョブ $j \in N$ に対して、

$$S_j(x_j) \subseteq M[a(x), b(x)] \quad (1)$$

が明らかに成立している。

各ジョブ $j \in N \setminus \{1\}$ とマシン部分集合の族 C_j の位数に関する二つのインデックス $1 \leq \ell \leq p$ および $1 \leq k \leq p$ に対して、

$$d_j(\ell, k) = |S_{j-1}(\ell) \cap S_j(k)| \quad (2)$$

を、二つのマシン部分集合 $S_{j-1}(\ell)$ と $S_j(k)$ の間の“類似度”と定義する。これは、 $S_{j-1}(\ell)$ と $S_j(k)$ の両方に共通して属するマシンの数である。そして、実行可能解 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ の“類似度和”を、すなわち、選択されたマシン部分集合の列 $S_1(x_1), S_2(x_2), \dots, S_n(x_n)$ を通しての類似度の総計を、

$$f(x) = \sum_{j=2}^n d_j(x_{j-1}, x_j) \quad (3)$$

と定義する。この類似度和の最大化を、辞書式二目的マシン部分集合選択問題の第一目的とする。与えられた問題例に対して、類似度和の最大値を f^* によって表すことがある。

さらに、実行可能解 x によって誘導されたマシン部分列 $M[a(x), b(x)]$ の長さ

$$g(x) = b(x) - a(x) + 1 \quad (4)$$

を、 x の“伸長度”と定義する。この伸長度の最小化を、辞書式二目的マシン部分集合選択問題の第二目的とする。第一の目的関数は、連続するコードに共通する構成音をつなげることを直接的に目指している。一方、この第二の目的関数は、与えられたコード進行を

演奏したとき、実際に弾いたいくつかの鍵が、鍵盤上で一定の範囲内に収まることを目指している。ただし、文献においては、あるコード進行に対して、弾いた鍵が一定範囲内に収まるといった“まとまり”を特に要求していない、と思われる演奏例も見受けられる。そのような転回形の使用例については、次節で触れることにする。

与えられた問題例に対して、実行可能解 x^* が $f(x^*) = f^*$ を満たし（すなわち、類似度和が最大値を取り）、かつ $f(x') = f^*$ を満たす任意の実行可能解 x' に対して、それが $g(x^*) \leq g(x')$ を満たすとき、 x^* を最適解と呼ぶことにする。 $g^* = g(x^*)$ は、伸長度の二次的最小値である。辞書式二目的マシン部分集合選択問題の目的は、その任意の問題例に対して（一つの）最適解を求めることである。

4. 計算例

結論を言えば、辞書式二目的マシン部分集合選択問題は多項式時間で解ける。計算例を紹介する前に、その多項式時間アルゴリズムの概要を説明する（具体的には、再び [4] 参照）。

辞書式二目的マシン部分集合選択問題の与えられた問題例に対して、最小の伸長度を g_{\min} と記す。最適解 x^* の伸長度 $g(x^*) = g^*$ は二次的最小値であるから、最小の伸長度は $g_{\min} \leq g^*$ を満たす。最小の伸長度 g_{\min} に関して、つぎの観察を得ることは難しくない：

その長さが $b - a + 1 < g_{\min}$ である任意のマシン部分列 $M[a, b] \subseteq M$ に対しては、マシン部分集合の族 C_j に属するすべてのマシン部分集合が $M[a, b] \subseteq M$ に含まれない、すなわち、

$$S_j(k) \not\subseteq M[a, b], \quad \forall k = 1, 2, \dots, p \quad (5)$$

であるようなジョブ $j \in N$ が、少なくとも一つ存在する。

ここで、与えられた問題例の長さ m のマシン列 M を、あるマシン部分列 $M[a, b] \subseteq M$ に置き換えた問題例（便宜上、局所問題例と呼ぶ）を考える。各ジョブ $j \in N$ に対して、そのマシン部分集合の族 C_j の中に

$$S_j(k) \subseteq M[a, b]$$

であるマシン部分集合が一つ以上存在すれば、上述の観察から、局所問題例も実行可能解を持つことがわかる。よって、 $O(m^2)$ 個の局所問題例をすべて列挙

すれば、与えられるマシン部分列が最適解によって誘導されるそれ、すなわち、 $M[a(x^*), b(x^*)]$ の局所的問題例を調べることになる。

一方、辞書式二目的マシン部分集合選択問題の第一目的、すなわち、類似度最大の最大化には、無閉路有向グラフにおいて最長路を求める多項式時間アルゴリズム (例えば、教科書 [10]) を用いればよい。 $O(m^2)$ 個の局所的問題例をすべて列挙している最中に、マシン部分列が $M[a(x^*), b(x^*)]$ である局所的問題例が現れて、そこで最長路問題を解くことで最適解 x^* を得ることができる。もちろん、与えられたマシン部分列が $M[a(x^*), b(x^*)]$ であるかどうかは、事前にはわからない。よって、探索中の最良解を常に保持しておき、最終的な最良解を最適解として出力することになる。局所的問題例の列挙の仕方などで、その実装に細かい差異が生じるかもしれないが、アルゴリズムが多項式的な計算時間で動作することには違いない。

4.1 例題 1

最初のコード進行として、第 2 節にも登場させた (C, Am, Dm, G) を取り上げる。演奏には図 1 の鍵盤を使うとして、マシン数は $m = 18$ 、また、コード進行には四つのコードが含まれるので、ジョブ数は $n = 4$ である。各コードに対しては、基本形、第一転回形、第二転回形のたかだか三つの候補のうちから、実際に弾くものを選ぶことを考える。つまり、各ジョブ $j \in N$ に関するマシン部分集合の族 \mathcal{C}_j の位数は $p = 3$ とする。マシン部分集合は

$$\begin{aligned} S_1(1) &= \{1, 5, 8\}, & S_1(2) &= \{5, 8, 13\}, \\ S_1(3) &= \{8, 13, 17\}, \\ S_2(1) &= \{10, 13, 17\} = S_2(2) = S_3(3), \\ S_3(1) &= \{3, 6, 10\}, & S_3(2) &= \{6, 10, 15\}, \\ S_3(3) &= \{10, 15, 18\}, \\ S_4(1) &= \{8, 12, 15\} = S_4(2) = S_4(3) \end{aligned}$$

で与えられているとする。

実行可能解 $x = (1, 1, 1, 1)$ は、四つのコードをすべて基本形で演奏することに対応する。その類似度相和は

$$\begin{aligned} f(x) &= |\{1, 5, 8\} \cap \{10, 13, 17\}| \\ &\quad + |\{10, 13, 17\} \cap \{3, 6, 10\}| \\ &\quad + |\{3, 6, 10\} \cap \{8, 12, 15\}| \\ &= 0 + 1 + 0 = 1, \end{aligned}$$

また、伸長度は



(a) $x = (1, 1, 1, 1)$



(b) $x^* = (3, 1, 3, 1)$

図 2 (C, Am, Dm, G) に対する二つの実行可能解 [4]

$$\begin{aligned} g(x) &= \max\{8, 17, 10, 15\} - \min\{1, 10, 3, 8\} \\ &\quad + 1 = 17 - 1 + 1 = 17 \end{aligned}$$

となる (誘導されるマシン部分列は $M[1, 17]$)。

一方、辞書式二目的マシン部分集合選択問題に対するアルゴリズムは、最適解として $x^* = (3, 1, 3, 1)$ を返す。これは、コード C と Dm を第二転回形で演奏することに対応する。最適解の類似度相和は

$$\begin{aligned} f(x^*) &= |\{8, 13, 17\} \cap \{10, 13, 17\}| \\ &\quad + |\{10, 13, 17\} \cap \{10, 15, 18\}| \\ &\quad + |\{10, 15, 18\} \cap \{8, 12, 15\}| \\ &= 2 + 1 + 1 = 4, \end{aligned}$$

また、伸長度は

$$\begin{aligned} g(x^*) &= \max\{17, 17, 18, 15\} - \min\{8, 10, 10, 8\} \\ &\quad + 1 = 18 - 8 + 1 = 11 \end{aligned}$$

となる。

二つの実行可能解 x と x^* から得られる楽譜を図 2 に示す。最適解 x^* から得られた楽譜は、文献 [6] において、音の流れを改善したとされる楽譜に一致している。

なお、この問題例においては、長さ 11 未満の任意のマシン部分列 $M[a, b]$ に対して、少なくとも一つのジョブ $j \in N$ が、すべての $k = 1, 2, 3$ について $S_j(k) \not\subseteq M[a, b]$ を満たす (式 (5) 参照)。よって、この問題例では、伸長度に関して $g(x^*) = g_{\min} = 11$ が成立している。

4.2 例題 2

つぎに、コード進行として (C, F, G, C) を取り上げる。演奏には再び図 1 の鍵盤を使うとして、マシン数は $m = 18$ 、また、コード進行には四つのコードが含まれるので、ジョブ数は $n = 4$ である。各コードに対しては、基本形、第一転回形、第二転回形のたかだか三つの候補のうちから、実際に弾くものを選ぶとする。

つまり、例題 1 と同様に、各ジョブ $j \in N$ に関するマシン部分集合の族 \mathcal{C}_j の位数は $p = 3$ とする。マシン部分集合は

$$\begin{aligned} S_1(1) &= \{1, 5, 8\}, & S_1(2) &= \{5, 8, 13\}, \\ S_1(3) &= \{8, 13, 17\}, \\ S_2(1) &= \{6, 10, 13\}, \\ S_2(2) &= \{10, 13, 18\} = S_2(3), \\ S_3(1) &= \{8, 12, 15\} = S_3(2) = S_3(3), \\ S_4(1) &= \{1, 5, 8\}, & S_4(2) &= \{5, 8, 13\}, \\ S_4(3) &= \{8, 13, 17\} \end{aligned}$$

で与えられているとする

実行可能解 $x = (1, 1, 1, 1)$ は、ここでも、四つのコードをすべて基本形で演奏することに対応する。その類似度相和は

$$\begin{aligned} f(x) &= |\{1, 5, 8\} \cap \{6, 10, 13\}| \\ &\quad + |\{6, 10, 13\} \cap \{8, 12, 15\}| \\ &\quad + |\{8, 12, 15\} \cap \{1, 5, 8\}| \\ &= 0 + 0 + 1 = 1, \end{aligned}$$

また、伸長度は

$$\begin{aligned} g(x) &= \max\{8, 13, 15, 8\} - \min\{1, 6, 8, 1\} + 1 \\ &= 15 - 1 + 1 = 15 \end{aligned}$$

となる。

一方、辞書式二目的マシン部分集合選択問題に対するアルゴリズムは、実装の仕方にもよるが、最適解として $x^* = (2, 1, 1, 2)$ 、あるいは $x^* = (3, 2, 1, 3)$ を返す。いずれにしても、類似度相和は

$$\begin{aligned} f(x^*) &= |\{5, 8, 13\} \cap \{6, 10, 13\}| \\ &\quad + |\{6, 10, 13\} \cap \{8, 12, 15\}| \\ &\quad + |\{8, 12, 15\} \cap \{5, 8, 13\}| \\ &= 1 + 0 + 1 \\ &= |\{8, 13, 17\} \cap \{10, 13, 18\}| \\ &\quad + |\{10, 13, 18\} \cap \{8, 12, 15\}| \\ &\quad + |\{8, 12, 15\} \cap \{8, 13, 17\}| \\ &= 1 + 0 + 1 = 2, \end{aligned}$$

また、伸長度は

$$\begin{aligned} g(x^*) &= \max\{13, 13, 15, 13\} - \min\{5, 6, 8, 5\} + 1 \\ &= 15 - 5 + 1 \\ &= \max\{17, 18, 15, 17\} - \min\{8, 10, 8, 8\} + 1 \\ &= 18 - 8 + 1 \\ &= 11 \end{aligned}$$

となる。

紙面の制約上、ここでは楽譜そのものを示さないが、二つの最適解 x^* から得られる楽譜は、文献 [7] においていずれも、音の流れを改善したとされる楽譜に一致している。

4.3 例題 3

コード進行 (C, G, Am, Em, F, C, F, G) を最後の例題としてを取り上げる。マシン数は $m = 18$ 、ジョブ数は $n = 8$ 、また、各マシン部分集合の族 \mathcal{C}_j の位数は $p = 3$ とする。マシン部分集合は

$$\begin{aligned} S_1(1) &= \{1, 5, 8\}, & S_1(2) &= \{5, 8, 13\}, \\ S_1(3) &= \{8, 13, 17\}, \\ S_2(1) &= \{8, 12, 15\} = S_2(2) = S_2(3), \\ S_3(1) &= \{10, 13, 17\} = S_3(2) = S_3(3), \\ S_4(1) &= \{5, 8, 12\}, \\ S_4(2) &= \{8, 12, 17\} = S_4(3), \\ S_5(1) &= \{6, 10, 13\}, \\ S_5(2) &= \{10, 13, 18\} = S_5(3), \\ S_6(1) &= \{1, 5, 8\}, & S_6(2) &= \{5, 8, 13\}, \\ S_6(3) &= \{8, 13, 17\}, \\ S_7(1) &= \{6, 10, 13\}, \\ S_7(2) &= \{10, 13, 18\} = S_7(3), \\ S_8(1) &= \{8, 12, 15\} = S_8(2) = S_8(3) \end{aligned}$$

で与えられているとする。

八つのコードをすべて基本形で演奏することに対応する実行可能解 $x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ において、類似度相和は

$$\begin{aligned} f(x) &= |\{1, 5, 8\} \cap \{8, 12, 15\}| \\ &\quad + |\{8, 12, 15\} \cap \{10, 13, 17\}| \\ &\quad + |\{10, 13, 17\} \cap \{5, 8, 12\}| \\ &\quad + |\{5, 8, 12\} \cap \{6, 10, 13\}| \\ &\quad + |\{6, 10, 13\} \cap \{1, 5, 8\}| \\ &\quad + |\{1, 5, 8\} \cap \{6, 10, 13\}| \\ &\quad + |\{6, 10, 13\} \cap \{8, 12, 15\}| \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1, \end{aligned}$$

また、伸長度は

$$\begin{aligned} g(x) &= \max\{8, 15, 17, 12, 13, 8, 13, 15\} \\ &\quad - \min\{1, 8, 10, 5, 6, 1, 6, 8\} + 1 \\ &= 17 - 1 + 1 = 17 \end{aligned}$$

となる。

一方、辞書式二目的マシン部分集合選択問題に対するアルゴリズムは、最適解 $x^* = (3, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 1)$ を



$$(a) \quad x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$



$$(b) \quad x^* = (3, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 1)$$

図 3 (C, G, Am, Em, F, C, F, G) に対する二つの実行可能解 [4]

返す. その類似度相和は

$$\begin{aligned} f(x^*) &= |\{8, 13, 17\} \cap \{8, 12, 15\}| \\ &\quad + |\{8, 12, 15\} \cap \{10, 13, 17\}| \\ &\quad + |\{10, 13, 17\} \cap \{8, 12, 17\}| \\ &\quad + |\{8, 12, 17\} \cap \{10, 13, 18\}| \\ &\quad + |\{10, 13, 18\} \cap \{8, 13, 17\}| \\ &\quad + |\{8, 13, 17\} \cap \{10, 13, 18\}| \\ &\quad + |\{10, 13, 18\} \cap \{8, 12, 15\}| \\ &= 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 = 4, \end{aligned}$$

また, 伸長度は

$$\begin{aligned} g(x^*) &= \max\{17, 15, 17, 17, 18, 17, 18, 15\} \\ &\quad - \min\{8, 8, 10, 8, 10, 8, 10, 8\} + 1 \\ &= 18 - 8 + 1 = 11 \end{aligned}$$

となる. 二つの実行可能解 x と x^* から得られる楽譜を図 3 に示す.

同じコード進行に対して, 別の問題例を考える. まず, 図 1 の鍵盤に F#4 (マシン 19) および G4 (マシン 20) を追加して, マシン数を $m = 20$ とする. ついで, $p = 4$ として, ジョブ 1 に対する第 4 のマシン部分集合

$$S_1(4) := \{13, 17, 20\}$$

を追加する. ジョブ 2 に対しては, 第 2 と第 3 のマシン部分集合を, コード G の第一転回形を表す

$$S_2(2) := \{12, 15, 20\}, \quad S_2(3) := S_2(2),$$

に変更する. さらに, 各ジョブ $j \in N \setminus \{1\}$ の第 4 のマシン部分集合を, 便宜上 $S_j(4) := S_j(3)$ とする.

ここで, 実行可能解 $\tilde{x} = (4, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1)$ について考える. その類似度相和は $f(\tilde{x}) = 4$, しかし, 伸長度は $g(\tilde{x}) = 16$ となる. その構成音の最下音を順に並べ

てみると,

$$C4, B3, A3, G3, F3, E3, F3, G3$$

となっている. すなわち, C4 から E3 までは単調に下降する順次進行, E3 以降は上昇する順次進行に転じている. 実際に聴いてみたときの印象は, $g(x^*) = 11$ であった解 x^* と比べてどのようであろうか. 文献 [11] (p.104) によれば, このコード進行は, 解 \tilde{x} のように演奏されることが多い. 最下音の C4 から E3 までの下降が, もの哀しさを美しく感じさせるということである. 辞書式二目的マシン部分集合選択問題の目的関数としては, 類似度相和と伸長度の組合せ以外の設定を検討する (まだ他に楽しむ) 余地がある.

5. おわりに

ガントチャートと五線譜においては, ともに横軸が時間の経過を表している. あるコード進行を鍵盤楽器で演奏するとき, そのコード進行に含まれる各コードを, 基本形あるいはいずれかの転回形で弾くとする. 本稿では, 楽器鍵盤の一つ一つの鍵を 1 台のマシン, コード進行に含まれる各コードをジョブと見て, 各ジョブを処理するマシン部分集合を選択する辞書式二目的最適化問題を紹介した. 選択されたマシン部分集合が, そのジョブに対応するコードの演奏のために, 同時に弾かれるいくつかの鍵に対応する.

辞書式二目的最適化問題が多項式時間で解けたこと, それ自体は良かったと思っている. しかしながら, お気づきの方もあるかと思うが, ジョブ数 n が大きくなってくると, 伸長度最小化は, 第二目的としてあまり機能しないことがある. 実際, 疑似乱数を用いて作成したマシン数 $m = 30$, ジョブ数 $n = 50$, マシン部分集合の族の位数 $p = 5$ および各マシン部分集合の位数が 3 程度の問題例に対して, 伸長度の二次的最小値は, マシン数 m に極めて近くなることが観察されている. 類似度相和を第一目的として維持するのであれば, 伸長度は第二目的とはせず, 制約条件によって許容値を考慮する方が適切かもしれない.

また, 計算例における入力との与え方も, 筆者の知識不足の感は否めない. 作曲活動の創造性や計算機による支援に関する文献 (たとえば, [11-13]) は, 歴史的にもさらに興味深い. はからずも [4] が編集委員の方のお目にとまったようで有り難いことであったが, 音楽の話題としては適切かどうかかわからず, 本稿の依頼をお受けするかどうかは正直なところ少し迷った. しかし, 最適解の演奏を聴くのは素直に楽しい. 本稿が,

読んでいただいた方の忙しいお仕事の合間の息抜きになったとしたら、それはそれで幸いである。楽譜については、スケジュールの良さや制約条件といった観点から、もうしばらくは懲りずに、他にもいろいろと調べてみたい。

謝辞 本学大学院博士前期課程の藤田尚幸さん、吉井涼太さんに謝意を示したい。二人とも文献 [4] の共著者である。藤田さんには最適化問題の定式化に際して有益な議論をしてもらった。吉井さんからはアルゴリズムの実装と計算実験に関して多大な協力を得た。また、“音楽の授業”で講師と生徒の役を引き受けてくれた二名の研究室卒業生にも深く感謝している。

参考文献

- [1] 秋山公良, 山崎潤一郎, 『ヤマハムックシリーズ/パソコンがあればかんたん—自宅がレコーディングスタジオになる!—』, ヤマハミュージックメディア, 2009.
- [2] 甲斐彰, 『楽譜が読めるステップ 12』, 音楽之友社, 1995.
- [3] 社団法人音楽電子事業協会監修, 日本シンセサイザープログラマー協会編著, 『ミュージッククリエイターハンドブック—MIDI 検定公式ガイド—』, ヤマハミュージックメディア, 2012.
- [4] N. Fujita, Y. Karuno and R. Yoshii, “Selecting a series of machine subsets with moderate changing,” In *Proceeding of International Symposium on Scheduling 2019 (ISS 2019)*, pp. 190–195, 2019.
- [5] 小谷野謙一, 『よくわかる楽典の教科書』, ヤマハミュージックメディア, 2011.
- [6] 佐美秀俊監修, 坂元輝弥マンガ, 『マンガでわかる! 音楽理論 3』, リットーミュージック, 2018.
- [7] 平沢栄司, 編集部, “定番コード進行からの作曲入門,” *DTM マガジン*, **18**(8), pp. 21–34, 2011.
- [8] 吉川隆人編集, 『100% ムックシリーズ/UTAU スターターパック』, 晋遊社, 2012.
- [9] M. Ehrgott, *Multicriteria Optimization, Second Edition*, Springer, 2005.
- [10] スティーブン・S・スキーナ (平田富夫訳), 『アルゴリズム設計マニュアル, 下』, 丸善出版, 2012.
- [11] D. Cope, *Computer Models of Musical Creativity*, MIT Press, 2005. (平田圭二監訳, 今井慎太郎, 大村英史, 東条敏訳, 『人工知能が音楽を創る—創造性のコンピュータモデル—』, 音楽之友社, 2019.)
- [12] フランソワ・デュボワ (井上喜惟監修, 木村彩訳), 『作曲の科学』, 講談社ブルーバックス, B-2111, 2019.
- [13] 竹中毅, “音楽と OR—特集にあたって,” *オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学*, **54**, p. 539, 2009.