一般化フィルトレーションと二項資産価格モデル

足立　高徳，中島　克志，琉　佳勳

本稿では，フィルトレーションを一般化したあと，その応用として，二項資産価格モデルを考え，記憶違いをしている人が証券の価格付けをすることが可能かどうかを議論する．

キーワード：一般化フィルトレーション，主観的フィルトレーション，リスク中立フィルトレーション，圏論的確率論，二項資産価格モデル

1. はじめに

確率過程論やその上で展開される確率微分方程式論や確率制御理論では，時刻とともに増大する情報を表現する**フィルトレーション** (filtration) という概念が重要なことは，周知のとおりである．世界の情報が時間の経過とともに増えていくというこの考え方は，極めて自然であるように思えるが，それはある意味全知全能の神の視点であり，個々人のもつ情報量が時間とともに常に増大するかといえば，それはちょっと違うだろう．人は物忘れをするし，勘違いもする．そうした個人がもつ情報の変遷は，だから減ることもあるだろうし，客観的な情報とは異なる形の経験として記憶されていることもある．そういった情報の変遷を表現する，いわば**主観的フィルトレーション** (subjective filtration) を提案するのが，本稿の前半の目的である．

このように主観的な状況を扱えるように，フィルトレーションの概念を一般化するわけであるが，一般化フィルトレーションの目的はそれだけではない．たとえば，ある時点までは誰も想像もしなかったブラック・スワンが舞い降りてきた状況を考えてみよう．2008 年に世界を襲った金融危機や 2020 年の新型コロナウイルス感染症はその典型例である．それまで可能な将来の世界線のなかに含まれていなかったブラック・スワンが突然現れると，その事象 (event) に対する確率を付与することができなくて，われわれは大いに動揺した．もちろん神であれば，そのような可能性も予め織り込んだ十分大きな根元事象の集合を用意しておくことができるだろうし，そうした市井の民が予想していなかった事象にも確率を与えることができただろう．しかしそのような理想化された視点に立つことで，本当にブラック・スワンのリスクを回避する理論を構築できるのだろうか？

本稿で定式化する一般化フィルトレーションは，時間とともに，根元事象の集合である確率空間の台集合すら変化することを許す．そしてそれによって，突然現れるブラック・スワンも自然な形で理論のなかに取り込めるようになる．

本稿の後半では，一般化フィルトレーションの応用として，二項資産価格モデル上の 2 種類のフィルトレーションを考える．特にある期間の記憶をなくした人がもつ主観的フィルトレーションに関するリスク中立フィルトレーションが存在することを示し，それを使って証券の価格付けを行う．これは，記憶が欠落した人も証券の価格付けを行えることを示している．

最後にまとめで，一般化フィルトレーションの他の応用や将来の発展方向について述べる．

2. 一般化フィルトレーション

この節では，古典的フィルトレーションを少しずつ拡張して，**一般化フィルトレーション**を定義する．

2.1 時間領域

フィルトレーションは，時間とともに増加する情報集合を表すが，このときの時刻の集合を**時間領域** (time domain) と呼び $\mathcal{T}$ で表す．主な $\mathcal{T}$ は以下のような形をしている．

1. $\mathcal{T} := \{0, 1, 2, \ldots, T\}$
2. $\mathcal{T} := \{0, 1, 2, \ldots\}$

あだち　たかのり
東京都立大学大学院経営学研究科
〒 100–0005 東京都千代田区丸の内 1–4–1
tadachi@tmu.ac.jp
なかじま　かつし
立命館アジア太平洋大学国際経営学部
〒 874–8577 大分県別府市十文字原 1–1
knakaji@apu.ac.jp
りゅう　よしひろ
立命館大学理工学部数理科学学科
〒 525–8577 滋賀県草津市野路東 1–1–1
iti2san@gmail.com

3. $\mathcal{T} := [0, T]$

4. $\mathcal{T} := [0, +\infty)$

つまり，一般的には時間領域は，最小元 0 をもつ**全順序集合** (totally ordered set) と考えてよい．

2.2 古典的フィルトレーション

$\bar{\Omega} := (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とする．今，$\{t_n\}$ を時間領域 $\mathcal{T}$ 内の増加列とすると，$\mathcal{F}_{t_n} \subset \mathcal{F}$ であるような増加列

$$\mathcal{F}_{t_0} \subset \mathcal{F}_{t_1} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{t_n} \subset \mathcal{F}_{t_{n+1}} \subset \cdots$$

を**古典的フィルトレーション** (classical filtration) と呼ぶ．言いかえれば，フィルトレーションは，

$$\{\mathcal{F}_s \ \subset \ \mathcal{F}_t\}_{s \leq t}$$

なる包含関係の列である．今，時刻 t ごとに σ 加法族のみを変更した確率空間

$$\bar{\Omega}_t := (\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$$

を考えると，$\mathcal{T}$ 内の $s \leq t$ に対して以下の（台集合上で）恒等関数として定義される関数 $i_{s,t}$

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Omega}_s & \xleftarrow{\ i_{s,t}\ } & \bar{\Omega}_t \\ \Psi & & \Psi \\ \omega & \longleftarrow\!\shortmid & \omega \end{array}$$

が可測関数となることと $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ となることが同値となる．言いかえれば，フィルトレーションは，可測関数の列

$$\{\bar{\Omega}_s \xleftarrow{\ i_{s,t}\ } \bar{\Omega}_t\}_{s \leq t}$$

と同一視できる．そこで以後は，σ 加法族 $\mathcal{F}_t$ の代わりに，このように可測関数の列としてフィルトレーションを捉えることにする．

2.3 フィルトレーションの一般化

前節で見たように，フィルトレーションは可測関数であるところの恒等関数 $i_{s,t}$ の列として捉えることができる．今，$i_{s,t}$ を任意の可測関数に一般化したらどうなるだろうか？

$$\{\bar{\Omega}_s \xleftarrow{\ f_{s,t}\ } \bar{\Omega}_t\}_{s \leq t}$$

ただし，$\mathcal{T}$ において $s \leq t \leq u$ のとき，

$$f_{t,t} = Id_{\bar{\Omega}_t} \quad \text{かつ} \quad f_{s,t} \circ f_{t,u} = f_{s,u}$$

を満たすとする．ただし $Id_{\bar{\Omega}_t}$ は $\bar{\Omega}_t$ 上の恒等関数．しかしながら，この定義はあまりに一般的すぎて，$\bar{\Omega}_t$ 上の確率変数 $X : \bar{\Omega}_t \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int_A E^{f_{s,t}}(X) d\mathbb{P} = \int_{f_{s,t}^{-1}(A)} X d\mathbb{P} \quad (\forall A \in \mathcal{F}_s)$$

を満たすような条件付期待値 $E^{f_{s,t}}(X) : \bar{\Omega}_s \to \mathbb{R}$ を定義することが一般にはできない．

これを可能にするには，可測関数 $f_{s,t}$ に**零保存**なる条件，すなわち任意の $A \in \mathcal{F}_s$ に対して $\mathbb{P}(A) = 0$ ならば $\mathbb{P}(f_{s,t}^{-1}(A)) = 0$ という条件を追加しなくてはいけない [1]．実際，$f_{s,t}$ が零保存ならば，後で見るように，条件付期待値 $E^{f_{s,t}}(X)$ を定義できる．なお，恒等関数を零保存関数に一般化した段階で，対応する σ 加法族の列は単調増大とは限らなくなっている点に注意されたい．

さらに一般化を進めるために，各時刻での確率空間を，σ 加法族だけでなく，確率測度 $\mathbb{P}_t$ や台集合 Ω_t も変動させることを考える．つまり以下のように時刻 t の確率空間 $\bar{\Omega}_t$ を再定義する．

$$\bar{\Omega}_t := (\Omega_t, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_t)$$

またこれに伴い，零保存関数の定義も以下のように拡張する．

定義 2.1. 二つの確率空間 $\bar{\Omega} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ と $\bar{\Omega}' = (\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ の間の可測関数 $f : \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}'$ は，

$$\mathbb{P} \circ f^{-1} \ll \mathbb{P}' \quad \text{（絶対連続）}$$

のとき，**零保存** (null-preserving) と呼ばれる．

定義 2.2. **一般化フィルトレーション** (generalized filtration) とは，零保存関数 $f_{s,t}$ の列

$$\{\bar{\Omega}_s \xleftarrow{\ f_{s,t}\ } \bar{\Omega}_t\}_{s \leq t}$$

で，$\mathcal{T}$ のなかで $s \leq t \leq u$ のとき，

$$f_{t,t} = Id_{\bar{\Omega}_t} \quad \text{かつ} \quad f_{s,t} \circ f_{t,u} = f_{s,u}$$

を満たすものである．

すると，以下の定理を得る．

定理 2.3（文献 [2]）**.** $\bar{\Omega}_t$ 上の確率変数 X に対して，$\bar{\Omega}_s$ 上の確率変数 Y が存在して，任意の $A \in \mathcal{F}_s$ で

$$\int_A Y d\mathbb{P}_s = \int_{f_{s,t}^{-1}(A)} X d\mathbb{P}_t$$

とできる．このとき確率変数 Y を $E^{f_{s,t}}(X)$ と書き，X の $f_{s,t}$ に沿った**条件付期待値** (conditional

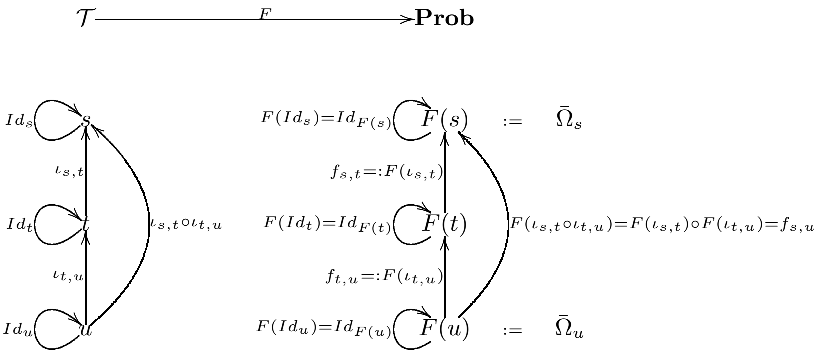


図 1　フィルトレーション $F : \mathcal{T} \to \mathbf{Prob}$

expectation) と呼ぶ.

証明. 以下のダイアグラムのように X^* を定義する.

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[r, mapsto] \arrow[d, phantom, "\pitchfork"] & X^*(D) := \int_D X\, d\mathbb{P}_t \arrow[d, phantom, "\pitchfork"] \\ \mathcal{F}_s \arrow[r, "f_{s,t}^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "\mathbb{P}_s"'] & \mathcal{F}_t \arrow[r, shift left, "X^*"] \arrow[r, shift right, "\mathbb{P}_t"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

すると $X^* \ll \mathbb{P}_t$ かつ $f_{s,t}$ が零保存だから

$$X^* \circ f_{s,t}^{-1} \ll \mathbb{P}_t \circ f_{s,t}^{-1} \ll \mathbb{P}_s$$

したがって以下のような Radon-Nikodym 微分が得られる.

$$Y := \partial(X^* \circ f_{s,t}^{-1})/\partial\mathbb{P}_s$$

このとき任意の $A \in \mathcal{F}_s$ に対して

$$\int_A Y\, d\mathbb{P}_s = \int_A d(X^* \circ f_{s,t}^{-1})$$
$$= (X^* \circ f_{s,t}^{-1})(A) = X^*(f_{s,t}^{-1}(A)) = \int_{f_{s,t}^{-1}(A)} X\, d\mathbb{P}_t$$

□

以後では，一般化フィルトレーションを，単にフィルトレーションと呼ぶことにする.

2.4　フィルトレーションは関手である

本節では，2.3 節で導入したフィルトレーションを圏論 [3] を使って再定義してみる.

定義 2.4 (二つの圏 $\mathbf{Prob}$ と $\mathcal{T}$)**.**

1. すべての確率空間とその間の零保存関数の集まりは**圏** (category) を成す．この圏を $\mathbf{Prob}$ で表す[1].

古典的フィルトレーション

$$\begin{array}{lccccccc} \mathcal{T} & t_0 & \le & t_1 & \le & t_2 & \le & \ldots \\ \mathbb{F} & \mathcal{F}_{t_0} & \subset & \mathcal{F}_{t_1} & \subset & \mathcal{F}_{t_2} & \subset & \ldots \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} \Omega & \Omega \arrow[l, "Id_\Omega"'] & \Omega \arrow[l, "Id_\Omega"'] & \ldots \arrow[l, "Id_\Omega"'] \end{tikzcd}$$

一般化フィルトレーション

$$\begin{tikzcd} \mathcal{T} \arrow[d, "F"] & t_0 & t_1 \arrow[l] & t_2 \arrow[l] & \ldots \arrow[l] \\ \mathbf{Prob} & \bar{\Omega}_{t_0} & \bar{\Omega}_{t_1} \arrow[l, "f_{t_0,t_1}"'] & \bar{\Omega}_{t_2} \arrow[l, "f_{t_1,t_2}"'] & \ldots \arrow[l, "f_{t_2,t_3}"'] \end{tikzcd}$$

図 2　各種フィルトレーション

2. 時間領域 $\mathcal{T}$ は, その要素を**オブジェクト** (object), また二つのオブジェクト s と t が $s \le t$ の関係があるとき t から s に唯一の**射** (arrow) があると考えると圏とみなせる.

すると，2.3 節で導入したフィルトレーションは，圏 $\mathcal{T}$ から圏 $\mathbf{Prob}$ への**関手** (functor) $F : \mathcal{T} \to \mathbf{Prob}$ とみることができる（図 1）.

3.　二項資産価格モデル上のフィルトレーション

本節では，2 節で導入したフィルトレーションの具体例として，二項資産価格モデル上の unusual なフィルトレーションを観ていく.

3.1　フィルトレーションの設定

定義 3.1 (時間領域と確率空間)**.** $s, t \in \mathbb{R}$ を実数とする.

[1] 圏 $\mathbf{Prob}$ についての詳細な議論は，文献 [2] を参照されたい.

1. 離散区間 (discrete interval).

$$
\begin{aligned}
[s,t]^0 &:= \{n \in \mathbb{Z} \mid s \le n \le t\} \\
[s,t)^0 &:= \{n \in \mathbb{Z} \mid s \le n < t\} \\
(s,t]^0 &:= \{n \in \mathbb{Z} \mid s < n \le t\} \\
(s,t)^0 &:= \{n \in \mathbb{Z} \mid s < n < t\}
\end{aligned}
$$

2. $\mathcal{T}$ を $[0,\infty)^0$ の元をオブジェクトとする圏とする．ただし $s,t \in [0,\infty)^0$ に対して，$t \ge s$ のときに限り t から s への一意な射 $\iota_{s,t}$ があるとする．
3. $B_t := \{0,1\}^{(0,t]^0}$　（関数空間）
4. $\mathcal{F}_t := 2^{B_t}$　（冪集合）
5. 確率測度 $\mathbb{P}_t : \mathcal{F}_t \to [0,1]$ を，予め $s \in (0,\infty)^0$ で定義しておいた定数 $p_s \in (0,1)$ を使って $\omega \in B_t$ に対して，以下のように定義する．

$$
\mathbb{P}_t(\{\omega\}) := \prod_{s \in (0,t]^0} (p_s)^{\omega(s)}(1-p_s)^{1-\omega(s)}
$$

6. $\bar{B}_t := (B_t, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}_t)$　（確率空間）[4]

ここで，任意の B_t から B_s への関数は，$\bar{B}_t$ から $\bar{B}_s$ への零保存関数となる点に注意されたい．

定義 3.2.　フィルトレーション $\mathcal{B}$ を以下で定義する．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{T} \arrow[r, "\mathcal{B}"] & \mathbf{Prob} \\
s & \bar{B}_s \\
t \arrow[u, "\iota_{s,t}"] & \bar{B}_t \arrow[u, "\mathcal{B}(\iota_{s,t}) := f_{s,t}"']
\end{tikzcd}
$$

なお，射 $f_{s,t}$ は以下の議論で個別に定義していく．

命題 3.3.　$\bar{B}_t$ 上の確率変数 X と $\omega \in \bar{B}_s$ に対して，以下が成り立つ．

$$
E^{f_{s,t}}(X)(\omega)\mathbb{P}_s(\{\omega\}) = \sum_{\omega' \in f_{s,t}^{-1}(\omega)} X(\omega')\mathbb{P}_t(\{\omega'\})
$$

次に，$f_{s,t}$ の候補を観ていく．

定義 3.4（$f_{s,t}$ の二つの候補）**.**　s,t を $s<t$ なる $\mathcal{T}$ のオブジェクトとする．

1. $\mathbf{full}_{s,t}$

$$
\begin{tikzcd}
\bar{B}_s & \bar{B}_t \arrow[l, "\mathbf{full}_{s,t}"'] \\
\omega\,|_{(0,s]^0} \arrow[u, phantom, "\cup"] & \omega \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

2. $\mathbf{drop}_{s,t}$

$$
\begin{tikzcd}
\bar{B}_s & \bar{B}_t \arrow[l, "\mathbf{drop}_{s,t}"'] \\
\mathbf{full}_{s,t}(\omega) \times \mathbb{1}_{(0,s)^0} \arrow[u, phantom, "\cup"] & \omega \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}
$$

以下の命題は，容易に示せる．

命題 3.5.　s,t,u を $s<t<u$ なる $\mathcal{T}$ のオブジェクトとする．

1. $\mathbf{full}_{s,t} \circ \mathbf{full}_{t,u} = \mathbf{full}_{s,u}$
2. $\mathbf{full}_{s,t} \circ \mathbf{drop}_{t,u} = \mathbf{full}_{s,u}$
3. $\mathbf{drop}_{s,t} \circ \mathbf{full}_{t,u} = \mathbf{drop}_{s,u}$
4. $\mathbf{drop}_{s,t} \circ \mathbf{drop}_{t,u} = \mathbf{drop}_{s,u}$

定義 3.6（(主観的) フィルトレーションの例）**.**　s,t を $s<t$ なる任意の $\mathcal{T}$ のオブジェクトとする．

1. 古典的フィルトレーション (classical filtration): $\mathbf{Full} : \mathcal{T} \to \mathbf{Prob}$

$$
\mathbf{Full}(\iota_{s,t}) := \mathbf{full}_{s,t}
$$

2. 脱落フィルトレーション (dropped filtration): $\mathbf{Drop}_{\alpha,\beta} : \mathcal{T} \to \mathbf{Prob}$　ただし $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ は定数.

$$
\mathbf{Drop}_{\alpha,\beta}(\iota_{s,t}) := \begin{cases} \mathbf{drop}_{s,t} & (t \ne s \in [\alpha,\beta]^0) \\ \mathbf{full}_{s,t} & (\text{そうでなければ}) \end{cases}
$$

つまり彼女は，$[\alpha,\beta]$ の間に起こったイベントを忘れている．

なお，$\mathbf{Drop}_{\alpha,\beta}$ がフィルトレーションであることは，命題 3.5 より言える．

定義 3.7.　$\mu, r \in \mathbb{R}$ および $\sigma \in \mathbb{R}_+$ とするとき以下の $\mathcal{B}$-適合過程を定義する．ただし $t \in [0,+\infty)^0$ とする．

1. $\xi_t : B_t \to \mathbb{R}$,　$(t \in (0,+\infty)^0)$.

$$
\xi_t(\omega) := 2\omega(t) - 1 \quad (\forall \omega \in B_t)
$$

2. 株価過程 $S_t : B_t \to \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
S_0(*) &:= s_0, \\
S_{t+1} &:= (S_t \circ f_{t,t+1})(1 + \mu + \sigma\xi_{t+1})
\end{aligned}
$$

ただし $*$ は B_0 の唯一の元，$s_0 \in \mathbb{R}_+$ は定数.

3. 債券過程 $b_t : B_t \to \mathbb{R}$.

$$b_0(*) := 1, \quad b_{t+1} := (b_t \circ f_{t,t+1})(1+r)$$

4. 割引株価過程 $(S_t)' : B_t \to \mathbb{R}$.

$$S'_t := b_t^{-1} S_t$$

3.2 リスク中立フィルトレーション

定義 3.8. 圏 **Prob** から測度空間のなす圏 **Meas** への忘却関手を $U : \mathbf{Prob} \to \mathbf{Meas}$ とする．フィルトレーション $\mathcal{B}$ に関する**リスク中立フィルトレーション** (risk-neutral filtration) とは，$U \circ \mathcal{C} = U \circ \mathcal{B}$ を満たすフィルトレーション $\mathcal{C}$, つまり

$$\mathcal{T} \overset{\mathcal{C}}{\underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows}} \mathbf{Prob} \xrightarrow{U} \mathbf{Meas}$$

で，S'_t が $\mathcal{C}$-マルチンゲール, すなわち $s < t$ ならば

$$E^{\mathcal{C}(\iota_{s,t})}(S'_t) = S'_s$$

となるものを言う．

本節の残りでは，以下の定理を証明することに注力する [5].

定理 3.9 (文献 [5])**.** 脱落フィルトレーション $\mathbf{Drop}_{\alpha,\beta}$ に関するリスク中立フィルトレーションが存在する．

まずは，一般的にリスク中立フィルトレーション $\mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(t) = (B_t, \mathcal{F}_t, \mathbb{Q}_t)$ となっているとき，確率測度 $\mathbb{Q}_t : \mathcal{F}_t \to [0,1]$ がどんな形をしているかを調べる．

定理 3.10. 確率過程 S'_t が $\mathcal{C}$-マルチンゲール であるための必要十分条件は，すべての $t \in [0,\infty)^0$ と $\omega \in B_t$ に対して，以下を満たすことである．

$$\mathbb{Q}_t(\{\omega\}) = c_1\, \mathbb{Q}_{t+1}(I_t(1,\omega)) + c_0\, \mathbb{Q}_{t+1}(I_t(0,\omega))$$

ただし $j = 0, 1$ のとき

$$I_t(j,\omega) := \{\omega' \in f^{-1}_{t,t+1}(\omega) \mid \omega'(t+1) = j\}$$

かつ

$$c_1 := \frac{1+\mu+\sigma}{1+r}, \quad c_0 := \frac{1+\mu-\sigma}{1+r}$$

証明. $\omega \in B_t$ とすると，命題 3.3 より

$$\begin{aligned}
&E^{\mathcal{C}(i_{t,t+1})}(S'_{t+1})(\omega)\mathbb{Q}_t(\{\omega\}) \\
=& \sum_{\omega' \in f^{-1}_{t,t+1}(\omega)} S'_{t+1}(\omega')\mathbb{Q}_{t+1}(\{\omega'\}) \\
=& \sum_{\omega' \in f^{-1}_{t,t+1}(\omega)} b^{-1}_{t+1}(\omega')(S_t \circ f_{t,t+1})(\omega') \\
&(1+\mu+\sigma\xi_{t+1}(\omega'))\mathbb{Q}_{t+1}(\{\omega'\}) \\
=& \sum_{\omega' \in f^{-1}_{t,t+1}(\omega)} (1+r)^{-(t+1)} S_t(\omega) \\
&(1+\mu+\sigma\xi_{t+1}(\omega'))\mathbb{Q}_{t+1}(\{\omega'\}) \\
=& S'_t(\omega) \sum_{\omega' \in f^{-1}_{t,t+1}(\omega)} \frac{1+\mu+\sigma\xi_{t+1}(\omega')}{1+r}\mathbb{Q}_{t+1}(\{\omega'\})
\end{aligned}$$

したがって

$$S'_t = E^{\mathcal{C}(i_{t,t+1})}(S'_{t+1})$$

であるための必要十分条件は,

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_t(\{\omega\}) =& \sum_{\omega' \in I_t(1,\omega)} \frac{1+\mu+\sigma}{1+r}\mathbb{Q}_{t+1}(\{\omega'\}) \\
&+ \sum_{\omega' \in I_t(0,\omega)} \frac{1+\mu-\sigma}{1+r}\mathbb{Q}_{t+1}(\{\omega'\}) \\
&= c_1\, \mathbb{Q}_{t+1}(I_t(1,\omega)) + c_0\, \mathbb{Q}_{t+1}(I_t(0,\omega))
\end{aligned}$$

□

定義 3.11. $\omega \in B_t$ かつ $d \in \{0,1\}$ のとき，$(\omega d) \in B_{t+1}$ は，任意の $s \in (0, t+1]^0$ に対して以下を満たす元とする．

$$(\omega d)(s) := \begin{cases} \omega(s) & (s \le t) \\ d & (s = t+1) \end{cases}$$

また混乱が生じない限り，$((\omega d_1)d_2)$ を括弧を省略して $\omega d_1 d_2$ と書く．

仮定 3.12. 関数列 $\{q_t : B_t \to [0,1]\}_{t \in (0,\infty)^0}$ が存在して，すべての $t \in (0,\infty)^0$ と $\omega \in B_t$ に対して以下を満たすとする．

1. $\mathbb{Q}_t(\{\omega\}) = \prod_{s \in (0,t]^0} q_s(\omega \mid_{(0,s]^0})$
2. $q_{t+1}(\omega 0) + q_{t+1}(\omega 1) = 1$

以後は仮定 3.12 を前提とし，$\{q_t\}_{t \in (0,\infty)^0}$ を求めることによって，リスク中立フィルトレーション $\mathcal{C}$ を決定する．

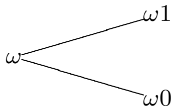
補題 3.13. $1 = c_1 x + c_0(1-x) \iff$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{r-\mu}{2\sigma} \quad \text{かつ} \quad 1-x = \frac{1}{2} - \frac{r-\mu}{2\sigma}$$

命題 3.14. $t \in (0,\infty)^0$ に対して，もし $f_{t,t+1} = \mathbf{full}_{t,t+1}$ ならば，$\mathbb{Q}_t(\{\omega\}) \neq 0$ であるような $\omega \in B_t$ に対して，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} q_{t+1}(\omega 1) &= \frac{1}{2} + \frac{r-\mu}{2\sigma} \\ q_{t+1}(\omega 0) &= \frac{1}{2} - \frac{r-\mu}{2\sigma} \end{aligned}$$

証明.



$$\begin{array}{ccc} B_t & \xleftarrow{\mathbf{full}_{t,t+1}} & B_{t+1} \\ \Cup & & \Cup \\ \omega & \xleftarrow{\mathbf{full}_{t,t+1}} & \omega d_{t+1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{full}_{t,t+1})^{-1}(\omega) &= \{\omega 0, \omega 1\} \\ I_t(1,\omega) &= \{\omega 1\} \\ I_t(0,\omega) &= \{\omega 0\} \end{aligned}$$

定理 3.10 より

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_t(\{\omega\}) &= c_1 \mathbb{Q}_{t+1}(I_t(1,\omega)) + c_0 \mathbb{Q}_{t+1}(I_t(0,\omega)) \\ &= c_1 \mathbb{Q}_{t+1}(\{\omega 1\}) + c_0 \mathbb{Q}_{t+1}(\{\omega 0\}) \end{aligned}$$

ここで

$$\mathbb{Q}_{t+1}(\{\omega d_{t+1}\}) = \mathbb{Q}_t(\{\omega\}) q_{t+1}(\omega d_{t+1})$$

かつ $\mathbb{Q}_t(\{\omega\}) \neq 0$ であるから，

$$1 = c_1 q_{t+1}(\omega 1) + c_0 q_{t+1}(\omega 0)$$

したがって補題 3.13 より以下を得る．

$$q_{t+1}(\omega 1) = \frac{1}{2} + \frac{r-\mu}{2\sigma}, \quad q_{t+1}(\omega 0) = \frac{1}{2} - \frac{r-\mu}{2\sigma}$$

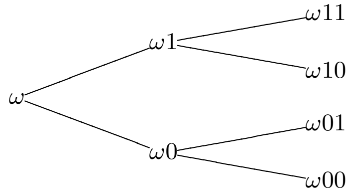
□

命題 3.14 で得られた確率は，ω にも t にも依存していない点に注意されたい．

命題 3.15. $t \in (0,\infty)^0$ に対して，もし $f_t = \mathbf{drop}_{t,t+1}$ ならば，$\mathbb{Q}_{t-1}(\{\omega\}) \neq 0$ であるような $\omega \in B_{t-1}$ に対して，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} q_t(\omega 1) &= 0 \\ q_t(\omega 0) &= 1 \\ q_{t+1}(\omega 01) &= \frac{1}{2} + \frac{r-\mu}{2\sigma} \\ q_{t+1}(\omega 00) &= \frac{1}{2} - \frac{r-\mu}{2\sigma} \end{aligned}$$

証明.



$$\begin{array}{cccc} B_{t-1} & B_t & \xleftarrow{\mathbf{drop}_{t,t+1}} & B_{t+1} \\ \Cup & \Cup & & \Cup \\ \omega & \omega 0 & \xleftarrow{\mathbf{drop}_{t,t+1}} & \omega d_t d_{t+1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{drop}_{t,t+1})^{-1}(\omega 1) &= \emptyset \\ I_t(1,\omega 1) = I_t(0,\omega 1) &= \emptyset \\ (\mathbf{drop}_{t,t+1})^{-1}(\omega 0) &= \{\omega 00, \omega 01, \omega 10, \omega 11\} \\ I_t(1,\omega 0) &= \{\omega 01, \omega 11\} \\ I_t(0,\omega 0) &= \{\omega 00, \omega 10\} \end{aligned}$$

定理 3.10 より

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}_t(\{\omega 1\}) \\ &\quad = c_1 \mathbb{Q}_{t+1}(I_t(1,\omega 1)) + c_0 \mathbb{Q}_{t+1}(I_t(0,\omega 1)) = 0 \end{aligned}$$

今，

$$\mathbb{Q}_t(\{\omega d_t\}) = \mathbb{Q}_{t-1}(\{\omega\}) q_t(\omega d_t)$$

かつ $\mathbb{Q}_{t-1}(\{\omega\}) \neq 0$ であるから，

$$q_t(\omega 1) = 0, \quad q_t(\omega 0) = 1 - q_t(\omega 1) = 1$$

次に，再び定理 3.10 より

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_t(\{\omega 0\}) &= c_1 \mathbb{Q}_{t+1}(I_t(1,\omega 0)) + c_0 \mathbb{Q}_{t+1}(I_t(0,\omega 0)) \\ &= c_1 \big(\mathbb{Q}_{t+1}(\{\omega 01\}) + \mathbb{Q}_{t+1}(\{\omega 11\})\big) \\ &\quad + c_0 \big(\mathbb{Q}_{t+1}(\{\omega 00\}) + \mathbb{Q}_{t+1}(\{\omega 10\})\big) \end{aligned}$$

両辺を $\mathbb{Q}_{t-1}(\{\omega\}) \neq 0$ で除して

$$\begin{aligned} q_t(\omega 0) &= c_1 \big(q_t(\omega 0) q_{t+1}(\omega 01) + q_t(\omega 1) q_{t+1}(\omega 11)\big) \\ &\quad + c_0 \big(q_t(\omega 0) q_{t+1}(\omega 00) + q_t(\omega 1) q_{t+1}(\omega 10)\big) \end{aligned}$$

したがって $q_t(\omega 1) = 0$ かつ $q_t(\omega 0) = 1$ であるから，

$$1 = c_1 q_{t+1}(\omega 01) + c_0 q_{t+1}(\omega 00)$$

よって補題 3.13 より以下を得る．

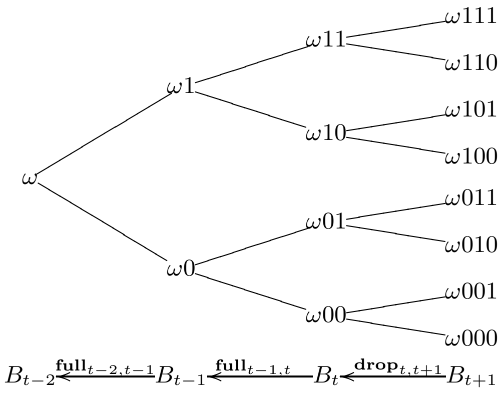


図 3 フィルトレーション $\mathbf{Drop}_{t-0.5,t+0.5}$

$$q_{t+1}(\omega 01) = \frac{1}{2} + \frac{r-\mu}{2\sigma}, \quad q_{t+1}(\omega 00) = \frac{1}{2} - \frac{r-\mu}{2\sigma}$$

□

命題 3.16. $\mathbf{full}_{t,t+1}$ と $\mathbf{drop}_{t,t+1}$ はともに $\mathbb{Q}_t$ と $\mathbb{Q}_{t+1}$ に関して零保存である．

証明. $\omega \in B_t$ とすると，仮定 3.12 より

$$(\mathbb{Q}_{t+1} \circ \mathbf{full}_{t,t+1}^{-1})(\omega) = \mathbb{Q}_{t+1}(\{\omega 1, \omega 0\}) = \mathbb{Q}_t(\omega)$$

したがって $\mathbf{full}_{t,t+1}$ は零保存．

つぎに $\mathbf{drop}_{t,t+1}$ の場合，$\omega' \in B_{t-1}$ とすると，命題 3.15 より $\mathbb{Q}_t(\omega' 1) = 0$ だが，一方で

$$(\mathbb{Q}_{t+1} \circ \mathbf{drop}_{t,t+1}^{-1})(\omega' 1) = \mathbb{Q}_{t+1}(\emptyset) = 0$$

となるから，$\mathbf{drop}_{t,t+1}$ も零保存． □

定理 3.17（文献 [5]）**.** 脱落フィルトレーション $\mathbf{Drop}_{\alpha,\beta}$ に関するリスク中立フィルトレーション $\mathcal{C}$ が存在する．このとき，確率空間 $\mathcal{C}(t)$ の確率測度 $\mathbb{Q}_t$ は $\mathbf{Drop}_{\alpha,\beta}(t)$ の確率測度 $\mathbb{P}_t$ と同値ではない．したがって，EMM ではない．実際，確率測度 $\mathbb{Q}_t$ は一意には定まらない．同様に，リスク中立フィルトレーション $\mathcal{C}$ も一意には決まらない．

証明. 命題 3.14 と命題 3.15 で得られた q_t を仮定 3.12 に代入すると確率測度 $\mathbb{Q}_t$ が得られる．一方命題 3.16 より，$\mathbb{Q}_t$ の下で射 $\mathbf{full}_{t,t+1}$ と $\mathbf{drop}_{t,t+1}$ は零保存となる．したがって $\mathcal{C}$ はフィルトレーションであることが言える．またこの $\mathbb{Q}_t$ は，その作り方より，明らかに定理 3.10 の必要十分条件を満たす．したがって，フィルトレーション $\mathcal{C}$ は，$\mathbf{Drop}_{\alpha,\beta}$ に関するリスク中立フィルトレーションである．ところで，命題 3.15 では，$q_{t+1}(\omega 11) \in [0,1]$ は任意の値を取り得る．このとき $q_{t+1}(\omega 10)$ は $1 - q_{t+1}(\omega 11)$ によって計算できる．つまり確率測度 $\mathbb{Q}_{t+1}$ は，一意には定まらない． □

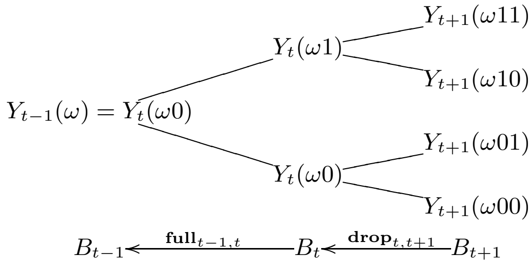


図 4 $\mathbf{Drop}_{t,t}$ による価格付け

3.3 価格付け

$\mathcal{C} : \mathcal{T} \to \mathbf{Prob}$ をリスク中立フィルトレーション，$Y : B_T \to \mathbb{R}$ を時刻 T でのペイオフとすると，時刻 t での Y の価格 Y_t は，一意の射 $\iota_{t,T} : T \to t$ を使って以下の式で与えられる．

$$Y_t := E^{\mathcal{C}(\iota_{t,T})}(b_T^{-1} Y)$$

つまり脱落フィルトレーションを主観的フィルトレーションとしてもっている人も，証券 Y の価格付けを行える．ただ，こうして得られた価格が市場均衡価格にどのように影響を与えるかについては追加的な考察が必要になる．

4. まとめ

本稿では，一般化フィルトレーションという概念を提案した．これは従来の単調増加な情報列という枠組みを超えて，情報の発展が必ずしも増えるだけでなく，減少したり，捻じ曲がったりすることを許す拡張されたフィルトレーションであり，ちょうど個人に帰属する主観的確率測度のように，個人の情報変遷の履歴としての主観的フィルトレーションを表現できる．自然な興味として，このように一般化されたフィルトレーションの下で，従来の確率解析や確率制御の理論をどこまで展開できるか，というものがある．

本稿では，一つの応用例として，二項資産価格モデルで従来のフィルトレーション（古典的フィルトレーション）に加え，一定期間の記憶を失った脱落フィルトレーションを導入し，後者を主観的フィルトレーションとしてもつ個人が，何らかの意味で，証券の価格付けをすることが可能かを議論した．これはすなわち，この主観的フィルトレーションに対応するリスク中立

フィルトレーションが存在するかという問題に帰着し，本稿ではその存在を示した．しかしながら，得られたリスク中立フィルトレーションは，完備市場で観察される古典的リスク中立確率測度とは異なり，一意に定まらない．これはある意味，このような一般化フィルトレーションをもつ市場は，（少なくともそのフィルトレーションを主観的フィルトレーションとしてもつ個人にとっては）完備ではない，ということになるだろう．また，今回は扱わなかった他の主観的フィルトレーションに関してはリスク中立確率測度が存在しない場合も考え得るが，このとき，株式などの均衡市場価格がどのように決まるかは今後の研究テーマとなり得る．

言うまでもなく，本稿で示した一般化フィルトレーションの応用は一例に過ぎず，他にも多くの応用が考えられる．先に述べたように，一般化フィルトレーションを使うことによって従来の確率制御や確率微分方程式の理論を展開する可能性があるが，たとえば古典的フィルトレーションの下では，時間一貫性のない (time-inconsistent) 問題をフィルトレーションを捻じ曲げることによって，時間一貫性のある (time-consistent) 問題に変換することが考えられる．またファイナンスの信用リスク計算やインサイダー取引の解析に使われるフィルトレーションの拡張理論も，一般化フィルトレーションの枠組みで考えることができるだろう [6]．さらに，フィルトレーションとそれに関するリスク中立フィルトレーション，あるいは複数の異なる時間解像度をもつ時間領域上で定義されたフィルトレーションの関係などを研究するためには，フィルトレーションのなす空間を用意して，フィルトレーションの変換や収束を考えることが必要であろう．

以上の応用，もしくは発展についてさらに詳しく述べることは，紙数の都合から本稿では差し控えるが，機会があれば解説したい．

謝辞　本研究は，JSPS 科研費 JP17K01248, JP18K01551，および東京都立大学金融工学研究センターからの助成を受けている．

参考文献

[1] T. Adachi, “Toward categorical risk measure theory,” *Theory and Applications of Categories*, **29**, pp. 389–405, 2014.
[2] T. Adachi and Y. Ryu, “A category of probability spaces,” *Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo*, **26**, pp. 201–221, 2019.
[3] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician, Number 5 in Graduate Texts in Mathematics*, 2nd edition, Springer-Verlag, 1997.
[4] S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing, Model*, Springer-Verlag, 2005.
[5] T. Adachi, K. Nakajima and Y. Ryu, “A binomial asset pricing model in a categorical setting,” arXiv:1905.01894 [q-fin.MF], 2019.
[6] A. Aksamit and M. Jeanblanc, *Enlargement of Filtration with Finance in View*, Springer-Verlag, 2017.