

# マイナス金利モデルについて —金利デリバティブの視点から—

竹原 浩太

本稿ではマイナス金利の観測される現環境下を念頭に、代表的な金利モデルを概説した後、どのようにしてマイナス金利に対応するのか、デリバティブ評価の観点から解説を行う。

キーワード：金利モデル， マイナス金利， シフトed・モデル， Free-boundary SABR， Mixture SABR

## 1. はじめに

金利 (interest rate) はファイナンスにおける中心的課題であり、そのデリバティブ (金利・債券先物、債券オプション、キャップ (レット)・フロア (レット)、スワップションなど) は日々盛んに取引が行われている。

金利デリバティブの発展とともにさまざまな金利モデルが提案されてきたが、一部の例外を除きそのほとんどが名目金利は負にならない、という前提のもと構築されていた<sup>1</sup>。この考えは学界・実務を通じた共通の認識であったが、2014年6月ECB (欧州中央銀行) が政策金利をゼロ未満に設定するなどマイナス金利が実際に市場に観測されるようになると、非負という前提のもとに構築されていたモデルは修正を余儀なくされた。日本でも2000年代から長らくゼロ金利政策が続いたもののマイナス金利の観測は例外的であったが、2016年1月29日には日本銀行の黒田総裁がマイナス金利政策の採用を発表して欧州同様新たな時代に突入した。

本稿では金利モデルや金利デリバティブに興味のある読者を対象に、2節で代表的な金利モデルを概説したのち、3、4節でマイナス金利への対応について解説する。なお、同じく昨今の重要な話題であるマルチ・カーブ理論<sup>2</sup>や代表的参照金利である Libor の消滅と移行に関する話題は、誌面の都合上別の機会に譲る。

## 2. 代表的な金利モデル

本節では、主にマイナス金利以前に提案・開発された代表的金利モデルについて解説する。なお金利は株

や通貨といった他の資産と異なり、満期に応じて複数の金利が同時に観測されるため (これを金利の期間構造という)、大きく分けて

- ・ある一時点における、期間構造へのフィッティングを目的とするモデル
- ・期間構造の一部、または全体の変動を捉える時系列モデル

の二つのモデルが存在する<sup>3</sup>。本稿では金利デリバティブの評価を念頭に、後者について、特に連続時間モデルに限定して解説することにする。なお前者の代表としては、たとえば (静的な) Nelson and Siegel[1] などが挙げられる。

### 2.1 Black76 モデルとインプライド・ボラティリティ

#### 2.1.1 Black76 モデル

Black-Scholes (BS) モデルで知られた Fischer Black は Black[2] で、BS モデルを先物オプションに拡張した。これを Black76 モデルという。この後、最もベーシックな金利デリバティブである債券オプション・キャップ (フロア)・スワップションなどは Black76 モデルで評価されることが標準となった。

Black76 モデルでは、原資産  $X$  (債券オプションの場合は債券先物価格、キャップではフォワード金利、スワップションではスワップ金利) がドリフト項なし<sup>4</sup>の

<sup>1</sup> マイナス金利を許容するモデルも、それを企図したわけではなく、扱いの容易さなどの要因が重視されていたという側面が強い。

<sup>2</sup> これまで市場で観測されるいくつかの期間構造は本質的に同一だと考えられてきたが、2008年の金融危機以降、それぞれが異なるものと捉えられるようになり、複数のカーブ (期間構造) を区別して扱う枠組みが登場した。

<sup>3</sup> これらは必ずしも排反ではなく、両方を目的とするモデルも存在する。

<sup>4</sup> この仮定は、評価に用いる確率測度を適切に取ることで正当化される。詳しくは木島と田中 [3] を参照。

BSモデルに従うと仮定するところからスタートする：

$$\frac{dX_t}{X_t} = \sigma dw_t \quad (1)$$

(但し  $\sigma > 0$  は定数であり、 $w = \{w_t; 0 \leq t\}$  は Wiener 過程)。

このとき、たとえば満期  $T$ 、行使価格(またはレート)  $K$  のヨーロピアン・コールオプション(またはキャップ(キャップレット)、レシーバーズ・スワップション) 価格は

$$\begin{aligned} V_t &= D_{t,T}^X E^{Q^X} [(X_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= D_{t,T}^X (X_t N(d_+) - KN(d_-)) \\ &=: BS_{Call}(X_t, \sigma, t, T, K) \\ d_{\pm} &:= \frac{\ln \frac{X_t}{K} \pm \frac{\sigma^2(T-t)}{2}}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned} \quad (2)$$

(但し、 $D_{t,T}^X, Q^X$  はそれぞれ  $X$  の選択に応じた適切なディスカウント・ファクター、および同値マルチンゲール確率測度)となる。

なお、 $X$  をフォワード金利とした(すなわちキャップレット)場合、これは 2.4 節にて後述する Libor Market Model (LMM) に類似しているが、LMM においてはすべての(適用期間の異なる)金利を同時に考えるのに対し、Black76 モデルではそれぞれの金利や原資産を別個に考えていることが大きな違いである。

なお、以降では記述を簡潔にするため特に断らない限り  $X$  として適用期間  $[T - \Delta t, T]$  のフォワード金利  $F_{t,T}$  (すなわちオプションとしてはキャップレット) を考えることとする。

### 2.1.2 インプライド・ボラティリティ

式 (1), (2) において、パラメータ  $\sigma$  だけは市場で直接観測することができない。このため、何らかの方法で推定、または決定する必要がある。

このうちデリバティブ実務において標準的に用いられている方法が、インプライド・ボラティリティ (Implied Volatility, IV) と呼ばれるものである。この方法では市場におけるオプション価格  $C_{Mkt}(T, K)$  を所与とし、これを実現する  $\sigma$  の値を式 (2) を通して“逆算”する。すなわち、満期  $T$ 、行使レート  $K$  の IV は、

$$BS_{Call}(F_{t,T}, \sigma_{IV}(T, K), t, T, K) = C_{Mkt}(T, K)$$

を満たす  $\sigma_{IV}(T, K)$  として決定される。

### 2.1.3 ボラティリティ・サーフェス

本来、市場の参加者が全員同じ  $\sigma^*$  というパラメータをもつ Black76 モデルを信じ、それに基づきオプションを評価していた場合、その結果市場で観測されるオプション

価格を逆算した IV は、すべて等しく  $\sigma_{IV}(T, K) \equiv \sigma^*$  となるはずである。ところが現実には、 $T, K$  の異なるオプション価格から算出される IV が異なるといった現象が観測される。このような(相異なる) IV を総じて(インプライド・)ボラティリティ・サーフェスと呼び、特に満期  $T$  方向の違いをボラティリティの期間構造、行使レート  $K$  方向の違いをスキュー(またはスマイル)と呼ぶ<sup>5</sup>。

このうち期間構造に対しては、Black76 モデルの  $\sigma$  が定数という仮定を、時間に依存する確定的関数  $\sigma(t)$  に緩めれば対応することができる。一方、スキュー・スマイルについては Black76 モデルの枠組みでは対応できず、後述する quasi-Gaussian (qG) モデルや SABR (Stochastic- $\alpha\beta\rho$ ) モデルなど、より自由度の高いモデルを設定する必要がある。こうしたボラティリティ・サーフェスに対応できるモデルを用いることは、現在の金融実務(特にデリバティブ評価・リスク管理)においては必要不可欠な条件と言えるであろう。

## 2.2 短期金利モデル

Black76 モデルではそれぞれの原資産は別個に扱われ、相互の動きの関連性などは重要視されなかった。一方、リスク管理の観点からは当然こうした原資産(金利)は相関して動くはずであり、それぞれの原資産の動きを統一して説明できるモデルが必要となる。こうしたモデルのうち、早い段階から応用されたのが Vasicek モデル [4]/Cox, Ingersoll and Ross (以下 CIR モデル) [5]/Hull and White (以下 HW モデル) [6] などの短期金利モデルである。

短期金利モデルでは、Black76 モデルとは異なり実際に取引はされない(そして原資産にもならない)仮想上の瞬間的金利<sup>6</sup>  $r_t$  をモデル化する。この短期金利  $r_t$  を用いると、時刻  $t$  における満期  $T$  の割引債価格<sup>7</sup>  $D_{t,T}$  は  $D_{t,T} = E^Q[\exp(-\int_t^T r_u du) | \mathcal{F}_t]$  と表される(但し、 $Q$  はリスク中立確率測度)。

### 1. Vasicek/HW モデル

もっとも初期に提案された短期金利モデルとしては、文献 [4] による Vasicek モデルが挙げられる。ここでは  $r_t$  が

<sup>5</sup> 満期  $T$  を固定した IV 曲線の傾きをスキュー、曲率をスマイルと呼ぶこともある。

<sup>6</sup> 本稿ではこれを短期金利と呼ぶ。

<sup>7</sup> 式 (2) において、 $X$  を  $T$  満期のフォワード金利としたときの  $D_{t,T}^X$  に相当。

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dw_t \quad (3)$$

(但し,  $k, \theta, \sigma$  は定数) に従うと仮定している. このとき  $r_t$  は平均回帰性 ( $\theta$  から離れると戻る力が働く) をもち, また正規分布に従うことが知られている.

Vasicek モデルには定数パラメータが  $r_0$  を含め四つしかないため, 観測されるすべての期間構造 (または割引債価格) にフィットさせることは困難であった. これを改良したものが HW モデル [6] である. 具体的には, 式 (3) において平均回帰水準  $\theta$  を時間に依存する確定的関数  $\theta(t)$  に拡張している. これにより, 前述した Vasicek モデルがもつ二つの特徴を失うことなく, 期間構造へのフィットを可能としている.

一方, Vasicek モデル同様,  $r_t$  が正規分布に従うため負の値を取りうる. これは長らく Vasicek/HW モデルの欠点とされていたが, 昨今のマイナス金利下で見直されてきている.

また, キャップやスワップション価格の価格解が知られていること, そして 1 ファクターモデルの為計算負荷が小さいことなどから, 近年でも CVA (Credit Value Adjustment)<sup>8</sup> の評価など計算負荷の大きな課題については依然使用頻度が高いモデルとなっているようである.

## 2. CIR モデル

前述のとおり, Vasicek モデルは  $r_t$  が負の値を取るため, これを改良したものが CIR モデル [5] である. ここでは  $r_t$  が,

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dw_t$$

に従うと仮定している. このモデル下では,  $r_0 > 0, k\theta > \frac{\sigma^2}{2}$  を満たすとき  $r_t$  が正の領域に留まることが知られている.

これらはいずれもアフィン・モデルと呼ばれるクラスに属し, 割引債価格が  $D_{t,T} = \exp(A(t,T)r_t + B(t,T))$  (但し,  $A(t,T), B(t,T)$  はそれぞれ確定的な関数) という表現をもつことが知られている. また  $r_t$  とフォワード金利  $F_{t,T}$  は, 割引債を通して

$$\begin{aligned} F_{t,T} &= \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{D_{t,T-\Delta t}}{D_{t,T}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left( e^{-\Delta A(t,T)r_t - \Delta B(t,T)} - 1 \right) \quad (4) \\ \Delta A(t,T) &:= A(t,T) - A(t,T - \Delta t), \\ \Delta B(t,T) &:= B(t,T) - B(t,T - \Delta t) \end{aligned}$$

という関係で結ばれており, この式によりすべてのフォワード金利が単一の  $r_t$  により説明される<sup>9</sup>こともわかる.

なおこれらのモデルは 4.2 節にて後述するように, 「結果的に」ボラティリティ・スキューを表現しうるものの, 市場で観測されるスキューに「合わせる」自由度をもたないため, 後述する SABR モデルなどとは区別する必要がある. また, この他の短期金利モデルとしては Quadratic-Gaussian モデル [7, 8] などが挙げられる.

## 2.3 HJM モデル

前述のとおり, 代表的な短期金利モデルは初期の期間構造に合わせるができなかった. HW モデルではこの欠点が克服されているが, ある時点  $t_0$  の期間構造に合わせて決定された  $\theta(t; t_0)$  と, そこから  $\Delta t$  だけ先に観測された期間構造にフィットさせた  $\theta(t; t_0 + \Delta t)$  が一致しないという, いわゆる時間的整合性の問題からは逃れられない.

この問題に対して次に取られたアプローチは期間構造全体, すなわちすべての時点  $s (\geq t)$  に適用される瞬時的フォワード金利  $f_{t,s}$  を同時にモデル化するというものであった. Heath, Jarrow and Morton [9] はこれら  $\{f_{t,s}\}$  の従う過程が満たす条件を市場が無裁定であるという仮定から導出した. これを HJM モデルと呼ぶ.

彼らの提案した枠組みは非常に汎用性が高かった反面, モデルが一般にマルコフ性を満たさないという特徴ももっていた. これは長らく金融実務への応用において課題となっていたが, 近年ではモデルの一部に制約を課しマルコフ性を保証した qG モデル (文献 [10] 他)<sup>10</sup>などの利用も見直されている.

なお HJM モデルの設定に一定の条件を課すことで, 多くの短期金利モデルや次節で説明する LMM をその枠組みに内包することにも注意しておく. そういった意味で, HJM モデルは単一の金利モデルというよりその枠組み全体を指すことも多い.

<sup>8</sup> 取引相手 (カウンター・パーティー) との信用リスクをデリバティブ評価に反映する, 2008 年の金融危機前後から金融実務に生じた仕組み. カウンター・パーティーに対するエクスポージャーは単一のデリバティブだけではなくその相手と契約されるすべてのデリバティブに依存するため, 計算負荷が著しく大きい.

<sup>9</sup> ここに挙げた短期金利モデルでは, 期間構造上のすべての金利が同じ方向に動くという欠点をもつ.

<sup>10</sup> LMM に比べ計算負荷が小さい点は, CVA などの評価の際に大きな利点となる.

## 2.4 LMM

HJM モデルは汎用性が高いものの、計算負荷が高く、また瞬時的フォワード金利  $\{f_{t,s}\}$  という市場で直接観測できない対象をモデリングしているため、市場へのカリブレーションが容易ではなかった。このため登場したのが Brace et al.[11] などによる LMM である。LMM は見た目上、式 (1) の Black76 モデルに類似している。すなわち、期間  $[T_i, T_{i+1}]$  に適用されるフォワード金利  $F_t^i$  を Black76 モデルのように

$$\frac{dF_t^i}{F_t^i} = \sigma_i dw_t^{Q_i} \quad (5)$$

に従うと仮定する<sup>11</sup>。ここでは、モデルの出発点となる確率測度を  $Q_i$  として明示した。このとき、キャップレット価格は式 (2) と同様に Black-Scholes 公式を用いて表される。そのため観測されるキャップレットのボラティリティから直接  $\sigma_i$  を定めることができ<sup>12</sup>、これが実務において幅広く利用された理由の一つである。

Black76 モデルと大きく異なる点は、式 (5) における  $F_t^i$  の、異なる確率測度  $Q_j$  におけるダイナミクスを HJM モデルに基づく無裁定条件から導いたことである。このため、Black76 モデルと異なり、満期の異なるキャップやスワップションといった複数の金利デリバティブを同一の確率測度下で統一的に評価できる。一方で、Black76 モデルや HW モデルのように解析解が得られることはないため、近似やシミュレーションによる計算が必要となる。

## 2.5 LMM-SABR

本質的に対数正規分布に従う LMM では、観測されるキャップレットのスキュー・スマイルに対応することは不可能である。こうした背景から、Hagan et al.[12] によって提案された SABR (もしくはそれを LMM と組み合わせた LMM-SABR) モデルは、フォワード金利  $F_t^i$  を

$$\begin{aligned} dF_t^i &= \alpha_t^i (F_t^i)^{\beta_i} dw_{1t}^{Q_i}, \\ d\alpha_t^i &= \omega_i \alpha_t^i dw_{2t}^{Q_i}, \\ dw_{1t}^{Q_i} dw_{2t}^{Q_i} &= \rho_i dt \end{aligned}$$

$(\frac{1}{2} \leq \beta_i \leq 1, -1 \leq \rho_i \leq 1)$  という、確率的局所ボラティリティモデルで表現している (なおこのモデルが登場した時期はまだマイナス金利が観測されていない

かったため、 $F_t^i$  が非負になるよう  $F_t^i = 0$  における条件が別途定められている)。

SABR モデルでは、パラメータ  $\beta_i$  と  $\rho_i$  は主にスキューに、 $\omega_i$  はスマイルに対応している。このうち前者では二つのパラメータが同一の指標に対応するため、通常  $\beta_i$  はあらかじめ (統計的推定やトレーダーの経験則などに基づき) 定めておき、 $\alpha_0, \omega_i, \rho_i$  を観測される IV へのカリブレーションによって定めることが多い。

その際有用になるのが文献 [12] で与えられたキャップレットに対するブラック・ボラティリティ<sup>13</sup>に対する近似式である。満期が長いケースやボラタイルな市場、また分布の裾が強く影響する場合には精度に難があるものの、それ以外では実用的な精度をもつことが知られており、この近似式の有用性が SABR モデルを実務での主流に押し上げた。その後今日まで、Hagan et al.[13] や Takahashi et al.[14] など多くの研究で近似式の精度を高める試みが為されている。

ここまで代表的な金利モデルを概説したが、その多くは非負の金利を対象としたモデルであった。次節ではこれらのモデルをどのようにマイナス金利に対応させていくか、その手段について解説する。

## 3. シフトッド・モデル

本節ではまず直感的に理解が容易なシフトッド・モデル (shifted model) について解説する。

### 3.1 シフトッド・モデルの有効性

まず、ある確率過程  $Y_t^i$  が Black76 モデルや LMM, SABR のようにオプション価格解 (あるいはその近似) が知られているモデル

$$dY_t^i = \mu_i(t, Y_t^i) dt + \sigma_i(t, Y_t^i) dw_t^{Q_i}$$

に従うと仮定する<sup>14</sup>。次に、原資産  $F_t^i$  が

$$F_t^i = Y_t^i + \theta^i$$

すなわち  $Y_t^i$  を「シフト」したものとして表せるとすると、 $F_t^i$  は

$$\begin{aligned} dF_t^i &= d(Y_t^i + \theta^i) \\ &= \mu_i(t, F_t^i - \theta^i) dt + \sigma_i(t, F_t^i - \theta^i) dw_t^{Q_i} \end{aligned}$$

に従うことになる。これをシフトッド・モデル、あるいは displaced diffusion model という。  $\theta^i$  の符号が

<sup>11</sup>ここでは簡単のため 1-factor モデルで記述している。

<sup>12</sup>但し対数正規モデルのため、IV のスキュー・スマイルにはフィットできない。

<sup>13</sup>IV に類似した概念で、あるモデルにより算出されたオプション価格を BS 公式 (2) により“逆算”したボラティリティを指す。

<sup>14</sup>ここではマルコフ型のモデルを仮定している。

負であるとき、元のモデル  $Y_t^i$  が（従来の金利モデルのような）負の値を許さない場合 ( $0 \leq Y_t^i$ ) であっても、 $\theta^i \leq F_t^i$  となるため値域が負の領域に拡張される。

このモデル下で行使レート  $K$  のキャップレットは

$$\begin{aligned} V_t &= D_{t, T_{i+1}} E^{Q^i} [(F_t^i - K)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= D_{t, T_{i+1}} E^{Q^i} [(Y_t^i - (K - \theta^i))^+ | \mathcal{F}_t], \end{aligned} \quad (6)$$

すなわち  $Y^i$  を原資産とする行使レート  $K - \theta^i$  のオプションとみなすことができる。特に、 $Y_t^i$  が Black76/LMM のような式 (1), (5) に従うとき、これを shifted-lognormal モデルと呼ぶ：

$$dF_t^i = \sigma_i (F_t^i - \theta^i) dw_t^{Q^i}.$$

このとき、式 (2), (6) より、キャップレット価格は  $BSCall((F_t^i - \theta^i), \sigma_i, t, T_{i+1}, (K - \theta^i))$  と表現される<sup>15</sup>ことになる（なおこの場合元のモデルはスキューをもたないが、シフトされたモデルは  $\theta^i < 0$  の場合負のスキューを、 $\theta^i > 0$  の場合正のスキューをもつことが Lee and Wang[15] などによりわかっている）。

これは shifted LMM-SABR に対しても同様であり、文献 [12] などの与えたブラック・ボラティリティの近似公式をわずかに修正するだけで使用することが可能となる。この利便性の高さが、多くの金融機関で shifted-lognormal モデルや shifted-SABR モデルが利用された一因である。

### 3.2 シフトド・モデルの問題点

このように直感的に理解が容易で高い利便性をもつシフトド・モデルではあるが、次のような問題点も抱えている。

まず、シフト幅  $\theta^i$  をどのように決定するのか。これは通常、モデル管理者の手により「外から」与えられることが多い。その際は今後の金利の先行き、特にマイナス金利の「深掘り」を考慮しつつ現在の金利水準から適切なマージンを取って設定される。但し、必要以上に大きくとることはできない。元のモデル  $Y_t^i$  の分布がそのままシフトされることになるため、あまり絶対値が大きすぎる  $\theta^i$  を設定することは、シフトされた  $F_t^i$  が一定以上の大きなマイナス幅に分布することを示唆するためである。こうして  $\theta^i$  を固定した後、他のパラメータは市場へのカリブレーションなどで決められることが多い。

ところがマイナス金利幅が事前の予想より大きくなり、設定した  $\theta^i$  を超えた領域に突入した場合何が起

$\theta^i$	$\alpha_0^i$	$\beta^i$	$\rho^i$	$\omega^i$
-1.00%	20.0%	0.7	-0.30	20.0%
-1.25%	30.3%	0.7	-0.61	136.4%

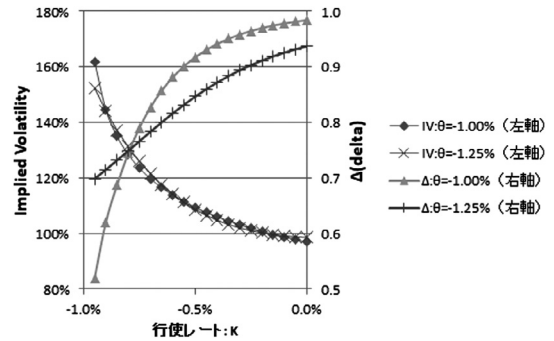


図 1 同一の IV スキューに対してカリブレーションされたパラメータ (表)、ボラティリティ (左軸に対応) およびリスク量  $\Delta$  (右軸に対応)

るだろうか。その場合新たに  $\theta^i$  を決めなおさねばならないが、これに伴い他のパラメータのカリブレーションが必要となり、その結果得られる新たなパラメータを用いてモデルから算出されるリスク量 (Delta, Vega などのいわゆる Greeks) に大きな影響を与える。すなわち、 $\theta^i$  を再設定した瞬間に他のパラメータやリスク量が「飛んで」しまうのである。

図 1 では SABR モデルを前提に、ある同一の IV スキューに対して、異なる  $\theta^i$  を用いてカリブレーションした際のパラメータ、(カリブレーションされた) ボラティリティ、およびリスク量である  $\Delta = \frac{\partial V_t}{\partial F_t}$  を示している（前述の理由により、 $\beta_i$  のみ固定している）。これを見ると IV 曲線に対してはほぼ同じ水準でカリブレーションできているものの、その結果得られたパラメータやリスク量は全く異なる水準であることがわかる（特に  $K = -1.0\%$  付近で、 $\Delta$  の値が大きく乖離している）。こうした特徴は金融実務、特にリスク管理において大きな問題となりうる。

またこの結果は、「他のパラメータと同じく  $\theta^i$  を日々のカリブレーションにより決定する」というアイデアも難しいことを示唆する。なぜなら、前述のとおり  $\theta^i$  によるシフトは（この場合負の）スキューを生み出すことが知られているが、同じくカリブレーションにより決定される  $\rho_i$  もスキューに影響を与える。すなわち異なる二つのパラメータが同じ指標に対してカリブレーションされる（実際、上の例でも全く異なる  $(\theta_i, \rho_i)$  を用いて、同一の IV にフィットできている）ことになり、これはいわゆる識別不能問題、ひいてはリスク量

<sup>15</sup>行使レートだけでなく、初期値も  $\theta^i$  だけシフトすることに注意。

の不安定性を生む。

#### 4. マイナス金利を許容するモデル

前節ではシフトド・モデルの抱える欠点を数値例を通して確認した。本節では、マイナス金利を表現するもう一つの取り組みを見る。それは、元々マイナス金利を許容するモデルを用いることである。

##### 4.1 Bachelier モデル

ファイナンスの父と呼ばれる Bachelier[16] は、後の Black-Scholes (あるいは Black76) モデルと異なり原資産が正規分布に従うこと、すなわち

$$dF_t^i = \sigma_i dw_t^{Q_i}$$

を仮定した。これを Bachelier モデル、あるいは Normal モデルと呼ぶ。これはマイナス金利を許容する最も単純なモデルであり、 $F_t^i$  が 0 を中心に正負の領域に対称に分布してしてしまうという明らかな欠点をもつにもかかわらず、マイナス金利下での Black76 に代わる<sup>16</sup>標準的役割を担っている。実際オプション価格の代わりに IV で quote される金利オプション市場において、マイナス金利突入、すなわち Black76 モデルでは IV を計算できなくなってしまっ以降、Normal モデルによる IV で建値がなされている。

Black76 モデルでは金利の変動幅 (率ではない) は  $\sigma_i \times F_t^i$  に比例するため、低金利下では理論的には変動幅が小さくなる。ところが現実には低金利が観測されるようになると、オプション市場では必ずしも IV が小さくならないことが多く、Black76 モデル (あるいは LMM) の限界は早くから指摘されていた (詳しくは櫻井 [17]4.6 節など)。これに対し Bachelier モデルでは低金利であっても変動幅は  $\sigma_i$  に比例するため、上記のような問題は起きない。

##### 4.2 Vasicek/Hull and White モデル

2.2 節で見たとおり、 $r_t$  が負の値を取りうる Vasicek/HW モデルでは式 (4) を通して  $F_t^i$  も負の値を取りうるということがわかる。前述のとおりその扱いやすさから現在でも HW モデルは金利モデルとして利用されており、特にマイナス金利突入後はこれに対応するモデルとして注目を集めている。

$r_t$  が正規分布に従うため  $F_t^i$  は shifted-lognormal モデルになることは明らかである<sup>17</sup>。このときシフト

幅 (およびスキューの度合い) は任意に与えられるわけではなく、式 (4) の形状から自動的に決定されることに注意しておく。

##### 4.3 Free-boundary SABR モデル

前節までの二つのモデルは、基本的に IV のスキューに合わせる自由度をもたない。一方 3.2 節で見たとおり、SABR モデルのシフトには実用上問題点があった。これを解決すべく、Antonov et al.[18] は SABR モデルを「自然に」負の領域に拡張した：

$$\begin{aligned} dF_t^i &= \alpha_t^i |F_t^i|^{\beta_i} dw_{1t}^{Q_i}, \\ d\alpha_t^i &= \omega_i \alpha_t^i dw_{2t}^{Q_i}, \\ dw_{1t}^{Q_i} dw_{2t}^{Q_i} &= \rho_i dt \end{aligned} \quad (7)$$

( $0 \leq \beta_i < \frac{1}{2}$ )。元々の SABR と比べて局所ボラティリティを表す  $(F_t^i)^{\beta_i}$  が  $|F_t^i|^{\beta_i}$  に置き換わっていることに加え、 $F_t^i = 0$  での条件を (SABR で仮定された吸収壁ではなく) 自由境界であると仮定している。これを Free(-boundary) SABR と呼ぶ。

文献 [18] はさらに、 $\rho_i = 0$  または  $\beta_i = 0$  の場合<sup>18</sup>について、近似ではない厳密なオプション価格公式を与えている。それ以外の一般的ケースについては、 $\rho_i = 0$  のモデルに「mapping」することで近似を行っている (詳しくは Antonov et al.[19] を参照)。また Kienitz[20] や Le Floc'h and Kennedy[21] では、オリジナルの SABR モデルに類似した IV 近似式を導出している。

##### 4.4 Mixture SABR モデル

さらに Antonov et al.[22] において、厳密解の得られている二つの場合を「混合」することで、新たなモデル：

$$F_t^i = \chi^i F_{1t}^i + (1 - \chi^i) F_{2t}^i \quad (8)$$

が提案された。ここで、 $F_{1t}^i, F_{2t}^i$  はそれぞれ、式 (7) において  $\rho_i = 0$  および  $\beta_i = 0$  としたもの、すなわち分布やオプション価格について厳密解が得られている確率過程である。また、 $\chi^i$  はこれら  $F_{1t}^i, F_{2t}^i$  と独立な、確率  $p_i$  で 1 を、 $1 - p_i$  で 0 を値に取るベルヌーイ分布に従う確率変数である。 $F_{1t}^i, F_{2t}^i$  はそれぞれ負の値を許すモデルであるため、当然  $F_t^i$  も負の値を取りうる。これを mixture SABR モデルという。

このとき  $\chi^i$  と  $F_{1t}^i, F_{2t}^i$  の独立性より

<sup>16</sup>Black76 モデル同様、キャップレットの価格は容易に計算できる。

<sup>17</sup>よって、Vasicek/HW モデル下では負のスキューが生まれる。

<sup>18</sup> $\beta_i = 0$  のケースを Free(-boundary) Normal SABR と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
& E_t^{Q_i}[(F_T^i - K)^+] \\
&= E_t^{Q_i}[\chi^i (F_{1T}^i - K)^+] + E_t^{Q_i}[(1 - \chi^i)(F_{2T}^i - K)^+], \\
&= p_i E_t^{Q_i}[(F_{1T}^i - K)^+] + (1 - p_i) E_t^{Q_i}[(F_{2T}^i - K)^+]
\end{aligned}$$

と分解して<sup>19</sup>キャップレットを評価することができる。最右辺の2項はどちらも厳密解が得られているため、左辺も同様に厳密解として得られることが本モデル最大の特徴である。

さらに文献 [19, 22] では shifted SABR や Free-boundary SABR に比べパラメータの自由度が高い<sup>20</sup>ため、キャップレットだけでなくスワップションや CMS (Constant Maturity Swap) などへ同時にカプリレーションすることも可能だという特徴を示している。

なお mixture SABR では  $\chi^i$  が静的確率変数として定義されているため、CVA の計算など将来時点でのデリバティブ価格を計算する際この  $\chi^i$  をどのように整合的に扱うのか、という課題があることにも注意しておく。

## 5. おわりに

本稿では、まずマイナス金利が観測される以前に主流であった代表的金利モデルについて概説し、その後マイナス金利に対してどのように対応されているのか、

1. 既存の非負金利モデルをシフトするシフトド・モデル

2. マイナス金利の存在を許容するモデル

の二つに分けて解説した。シフトド・モデルは直感的に理解がしやすく、またデリバティブ評価において式 (6) のように過去のモデルに基づく計算ツールを微小な修正のみで利用可能な点から、多くの金融機関で利用されているようである。一方で、3.2 節に見たとおりリスク管理上の大きな問題を抱えるため、マイナス金利の「深掘り」も想定される昨今では Free-boundary SABR や mixture SABR の利用も進んでいる。こうしたモデルの比較を行った研究としては、前出の文献 [19] のほか、菅沼と山田 [23] や谷 [24] など挙げられる。

モデルパラメータの市場へのカプリレーションや、リスク量・CVA の計算は現在でも非常に計算負荷が高く、実務上は SABR モデルなどに見られる解析 (近似) 的なオプション価格解・IV 解は不可欠である。そのた

め今後のモデル提案・開発の際もこうした特徴を備えることが実務上広く応用されるために必要であろう。

## 参考文献

- [1] C. Nelson and A. Siegel, "Parsimonious modeling of yield curves," *The Journal of Business*, **60**, pp. 473–489, 1987.
- [2] F. Black, "The pricing of commodity contracts," *Journal of Financial Economics*, **3**, pp. 167–179, 1976.
- [3] 木島正明, 田中敬一, 『資産の価格付けと測度変換』, 朝倉書店, 2007.
- [4] O. Vasicek, "An equilibrium characterisation of the term structure," *Journal of Financial Economics*, **5**, pp. 177–188, 1977.
- [5] J. C. Cox, J. E. Ingersoll and S. A. Ross, "A theory of the term structure of interest rates," *Econometrica*, **53**, pp. 385–407, 1985.
- [6] J. Hull and A. White, "Pricing interest-rate derivative securities," *The Review of Financial Studies*, **3**, pp. 573–592, 1990.
- [7] A. Pelsser, "A tractable yield-curve model that guarantees positive interest rates," *Review of Derivatives Research*, **1**, pp. 269–284, 1997.
- [8] M. Kijima, K. Tanaka and T. Wong, "A multi-quality model of interest rates," *Quantitative Finance*, **9**, pp. 133–145, 2009.
- [9] D. Heath, R. Jarrow and A. Morton, "Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation," *Econometrica*, **60**, pp. 77–105, 1992.
- [10] O. Cheyette, "Markov representation of the Heath-Jarrow-Morton model," *BARRA Working Paper*, 1991.
- [11] A. Brace, D. Gatarek and M. Musiela, "The market model of interest rate dynamics," *Mathematical Finance*, **7**, pp. 127–155, 1997.
- [12] P. Hagan, D. Kumar, A. Lesniewski and D. Woodward, "Managing smile risk," *Wilmott*, **18**, pp. 84–108, 2002.
- [13] P. Hagan, D. Kumar, A. Lesniewski and D. Woodward, "Arbitrage-free SABR," *Wilmott*, **69**, pp. 60–75, 2014.
- [14] A. Takahashi, K. Takehara and M. Toda, "A General computation scheme for a high-order asymptotic expansion method," *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **15**, pp. 903–927, 2012.
- [15] R. Lee and D. Wang, "Displaced lognormal volatility skews: Analysis and applications to stochastic volatility simulations," *Annals of Finance*, **8**, pp. 1519–181, 2009.
- [16] L. Bachelier, "Théorie de la spéculation," *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **3**, pp. 21–86, 1900.
- [17] 櫻井豊, 『数理ファイナンスの歴史』, 金融財政事情研究会, 2016.
- [18] A. Antonov, M. Konikov and M. Spector, "The free boundary SABR: Natural extension to negative rates," *Risk Magazine*, **28**(9), pp. 68–73, 2015.
- [19] A. Antonov, M. Konikov and M. Spector, *Modern SABR analytics: Formulas and insights for quants, former physicists and mathematicians*, Springer, 2019.
- [20] J. Kienitz, "Negative rates, SABR PDE and approximation," *Quantlib*, 2015.

<sup>19</sup>ここでは紙幅の関係で  $E[\cdot|\mathcal{F}_t] = E_t[\cdot]$  と略記した。

<sup>20</sup>各 SABR モデルのパラメータ 4 種 ( $\alpha, \beta_i, \omega_i, \rho_i$ ) のうち  $F_{1t}^i, F_{2t}^i$  に対してそれぞれ固定された  $p_i = 0$  および  $\beta_i = 0$  を除く 6 種と、 $\chi^i$  に関するパラメータ  $p_i$  の合計七つの自由度がある。

- [21] F. Le Floc'h and J. Kennedy, "Finite difference techniques for arbitrage free SABR," *SSRN Working Paper*, 2015.
- [22] A. Antonov, M. Konikov and M. Spector, "Mixing the SABR for negative rates: Analytical arbitrage-free solution," *Risk Magazine*, **30**(4), pp. 86–91, 2017.
- [23] 菅沼健司, 山田哲也, "マイナス金利を考慮したフォワードレート・モデルと市場の金利見通し," *IMES Discussion Paper*, 2017.
- [24] 谷栄佑, "SABR モデルに関する近年の話題," みずほ情報総研 調査・研究レポート, 2017.