不確実性下での適応的最適化

福永　拓郎

不確実性を含む離散最適化問題に対するアプローチの一つとして，適応的最適化がある．適応的最適化では，最適化問題のパラメータの一部が確率的に記述されているなどの状況下で，適応的に解を計算する．解の一部を決定したうえで，その決定を実行に移す．実行の過程で得られた情報を元に，その後の実行方針を適応的に決めるという過程を繰り返すことで，通常の最適化手法よりも良い性能を達成することを目指している．今日，機械学習に代表されるような情報の収集・認識をするための技術が目覚ましい発展を遂げているが，そのような技術で得られるような曖昧性を含む情報から効率的な意思決定をするために，適応的最適化は有力なアプローチの一つである．本稿では，その適応的最適化について紹介する．

キーワード：確率的最適化，適応的最適化，最短路問題，劣モジュラ最適化

1. 適応的最適化とは

近年，機械学習に代表されるように，情報を収集したり認識したりする技術は目覚ましい発展を遂げている．では，その収集・認識した情報から意思決定を行うための技術についてはどうだろうか？ 意思決定の技術として代表的なものに，数理最適化がある．数理最適化を用いて意思決定をする際には，満たさなければならない条件や最適化したい数量を表した数理最適化問題を記述する．そのうえで，この数理最適化問題の解を計算すると，その解が今後実行すべき計画を与えてくれる．数理最適化は言うまでもなく，この情報化社会になくてはならない技術であるが，発展目覚ましい情報認識・収集技術が与える情報から意思決定を行うために，数理最適化は有効だろうか？

具体例を通して考えよう．多くの機械学習アルゴリズムでは，確定的な予測を一つ返すのではなく，たとえば「この道を通るには 80％の確率で 20 分かかりますが，20％の確率で 30 分かかります」などのように，予測結果の確率分布を出力する．実際，皆さんもよく使うであろう Google Map では，サイトやアプリからではなく API 経由で 2 地点間の移動時間を問うと，悲観的・通常・楽観的の 3 通りの予測を返してくれる．このような情報から移動経路を決定するなどの意思決定を行うときに，どうするのが良いだろうか？ 通常の数理最適化はこのような予測を十分活用できるだろうか？

本稿では，この例のように不確実な情報が与えられる状況下での意思決定のための一つのアプローチとして，**適応的最適化**と呼ばれる手法を紹介する．適応的最適化は通常の数理最適化の枠組みを広げる枠組みである．不確実であったり曖昧性を含むような情報から計画を立て，計画の一部を実行し，実行の過程で得られた情報から計画をアップデートすることを試みることで，通常の最適化手法よりも良い性能を達成することを目指している．以下ではまず，適応的最適化とはどのようなものなのか，確率的最短路問題を例に説明しよう．

1.1 例：確率的最短路問題

最短路問題では頂点集合 V と辺集合 E からなるグラフ $G=(V,E)$ と，始点 $s\in V$，終点 $t\in V$，辺長 $l\colon E\to\mathbb{R}$ が入力として与えられる．G は無向グラフと有向グラフどちらの場合でも問題は定義できるが，ここでは無向グラフということにしておこう．そのうえで，s から辺をたどって t へ行く経路の中で，長さが最も短いものを計算する．ベルマン・フォード法やダイクストラ法といったアルゴリズムを用いれば多項式時間で最適な解を計算できることが知られている．

ここでは，最短路問題の辺長が確率的に変動する状況を考えよう．つまり，G 上の辺 e の長さ $l(e)$ が確率変数だと仮定する．$l(e)$ の分布は入力として与えられる．このとき，s から t への経路の長さも，確率的に変動する．長さの期待値が最も小さい経路を求める問題を，**確率的最短路問題**と呼ぶことにする．

適応的最適化ではこのような問題に対して，一つの解（この場合は s から t への経路）ではなく，解を決定するための**戦略**を求める．戦略とは，一部の行動を実行した後に何らかのフィードバックを外部から受け取り，再び行動を実行するといった過程を繰り返す計画のことである．フィードバックを受け取った以降の行

ふくなが　たくろう
中央大学理工学部
〒 112–8551 東京都文京区春日 1–13–27
fukunaga@ise.chuo-u.ac.jp

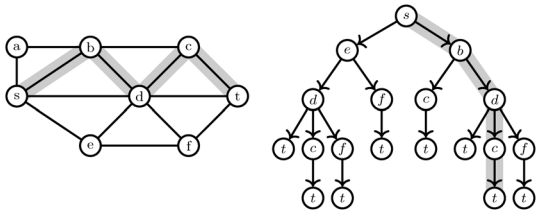

図 1　最短路問題の入力グラフ（左）と決定木（右）の例

動がそのフィードバックの中身によって変化するような戦略のことを特に**適応的な戦略**と呼び，そうでない（全体の行動が途中のフィードバックの中身によって変化しない）戦略のことを**非適応的な戦略**と呼ぶ．ある戦略がとる経路の長さの期待値のことを，その戦略の**目的関数値**と呼ぶことにする．

どのようなフィードバックを受け取ることができるかを決めるのも問題の設定の一部である．たとえば確率的最短路問題では次のような設定が考えられる．始点 s から終点 t まで向かっている途中に，ある頂点 v に着いたとする．このとき，v から出ている辺の長さの実現値を観測し，フィードバックとして受け取ることができる．この実現値に応じて，次にどの辺を通るのか決めるのが適応的戦略である．たとえば，高い確率で長さが短い辺があったとしよう．その辺を通るために，その辺が出ている頂点まで来たとする．しかし，いざ観測してみると，その辺の長さは思ったより長かったとする．そのときに，別の辺を通るよう経路を適応的に変更しようという訳である．

もちろん，以上で述べた設定はあくまで一例である．これとは異なる設定も当然考えることができる．たとえば，目的関数を経路の長さの期待値を最小化するのではなく，最悪ケースにおける長さを最小化することも考えられるかもしれない．また，辺長が不確実なのではなく，問題のほかの要素，たとえば辺の有無であったり頂点の有無が不確実な場合なども考えられるかもしれない．フィードバックの内容も，現在の頂点から出ている辺だけではなく別の辺の長さも観測できるなどの設定が考えられる．

1.2　適応的戦略の決定木による表現

適応的戦略は図 1 のような決定木の形式で表現することもできる．以下では混乱を避けるため，最短路問題における入力グラフの頂点・辺をそのまま頂点・辺と呼び，決定木の頂点・辺を節点・枝と呼ぶことにする．決定木の各節点は，それまでどのような選択をしてきてどのような観測結果を得てきたかを表す「状態」に対応している．図では，その時点にいる頂点のラベルを決定木の節点内に記している．決定木の一番上の節点が始点 s を出発前の状態を表している．決定木の各枝は，得られるフィードバックに応じて生じる選択の分岐を表現している．たとえば一番上の節点から出ている 2 本の枝は，s に接続している辺の状態の観測結果に応じて頂点 e と b のどちらかに行くことを表現している．決定木の葉（一番下にある節点）は，t にたどり着いた状態を表している．決定木で一番上の節点と葉の一つを結ぶ灰色の領域で囲んだパスは，入力グラフ上で灰色の領域で囲った s から t への経路をたどることになる状態を表現している．決定木のどの葉にたどり着くかは，入力グラフの各辺の状態（長さの実現値）によって決まる．各辺の状態は確率的に決まるので，決定木のどの葉にたどり着くかも確率的に決まる．

適応的最適化では，良い目的関数値をもつ適応的戦略を計算するようなアルゴリズムを設計することが目標である．そのようなアルゴリズムのことを適応的アルゴリズムと呼ぶこともある．適応的アルゴリズムを議論するときには，アルゴリズムに何らかの計算量の縛りをかけることが通常である．つまり，「多項式時間の適応的アルゴリズムの中でなるべくいいものを設計する」などが具体的な研究目標となる．これは，そのような縛りがないと，すべての決定木を列挙してその中から最も目的関数値が良いものを出力するなどのアプローチが可能になってしまうからである．適応的最適化と同じように不確実な情報から最適化を行う枠組みとしてオンライン最適化というものがあるが，計算量を気にしなければ問題として成り立たないという特徴は，オンライン最適化とは違う点である．オンライン最適化ではそもそも情報が不足している状態で選択を行うので，たとえいくら計算時間をかけたとしても最も良い選択をすることができないような状況を考えることが多い．対照的に，適応的最適化では確率分布など必要な情報はすべて与えられる．

また，アルゴリズムは適応的戦略（＝決定木）を陽に書き下して出力するわけではない．なぜなら，決定木のサイズ自体が多項式で収まるとは限らないので，そのようなことをしていては多項式時間アルゴリズムは得られないからである．フィードバックを受け取った後，何らかの計算を（多項式時間で）行い，次にとるべき行動を出力するというオラクル形式で戦略を与える．また，最初の行動を起こす前に前処理のための計算を行うことも許されている．

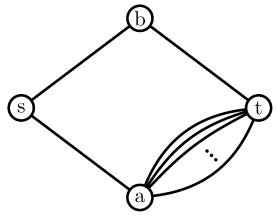

図 2　非適応的戦略が適応的戦略と比較して悪くなる例

2.　適応的最適化の困難性

確率的最短路問題を解くためのアプローチとしてまず思いつくのは，各辺の長さの期待値をとることで確定的な辺長をもつ最短路問題を定義し，ダイクストラ法などの通常の最短路アルゴリズムを利用して経路を計算したらどうかというものである．これは，非適応的な戦略としては最も良いものであると思われる．しかしながら，最良の適応的戦略と比較するといくらでも悪くなる場合がある．

たとえば，図 2 のような入力グラフを考える．始点が s，終点が t であり，この 2 点が，頂点 a を経由する経路と頂点 b を経由する経路で結ばれている．ただし，頂点 a と t の間には多くの多重辺が存在しており，s から a を経由して t に向かうにはこれらの多重辺のどれを通っても良い．以下，頂点 a と t の間に存在する多重辺の本数を n とする．辺は頂点 a と t を結ぶ辺を除いてすべて確定的な辺長をもつ．頂点 s に接続している辺の長さはすべて 0 であり，頂点 b と t の間の辺の長さは 1 としよう．頂点 a と t の間の多重辺の長さは，それぞれ独立に確率 0.0001 で 0，確率 0.9999 で $M > 1$ となるとしよう．この例に対する最適な非適応的戦略と適応的戦略は以下のようになる．

非適応的戦略：頂点 a と t の間の辺の長さは期待値をとるとほぼ M である．よって，辺長の期待値をとってから計算した最短路はこれらの辺を通ることはない．つまり，最良の非適応的な戦略は，頂点 s から b を経由して t へ向かう経路を通ることになる．この際の目的関数値は 1 である．

$$\text{非適応的戦略の最短経路長} = 1$$

適応的戦略：この問題例に対する適応的戦略を次のように定義する．まず，s から a へ移動した後に a と t の間の辺の長さを観測する．長さ 0 の辺が存在していればその辺を通って t へ移動する．この場合の経路の長さは 0 である．長さ 0 になる辺が一本もない場合は，いったん s に戻った後に頂点 b を経由する経路をたどって t へ向かう．この場合は経路の長さは 1 である．後者の場合が発生したとしても最初から b に向かうより損することはないわけだが，そもそも n が十分大きいと後者の場合が発生する確率は非常に小さい．具体的には，この戦略では

$$\mathbb{E}[\text{適応的戦略のとる経路の長さ}] = 1 \times 0.9999^n$$

となる．n が大きくなるとこれは 0 に収束する．

以上の議論から，二つのことがわかる．一つは，この問題例では

$$\frac{\text{非適応的戦略の目的関数値}}{\text{適応戦略の目的関数値}} \geq \frac{1}{1 \times 0.9999^n}$$

となり，右辺は n が大きくなるにつれて $+\infty$ に発散する．つまり，非適応的戦略では適応的戦略と比較して限りなく損をする場合がある．もちろん，これはあくまでこの問題のこの例ではそうなるというだけの話で，ほかの問題でそうなるとは必ずしも言い切れない．最適な適応的戦略と非適応的戦略の目的関数値の比の最大値は**適応性ギャップ**と呼ばれるが，さまざまな問題について適応性ギャップがいくらになるか議論されている．確率的最短路問題では上の例から適応性ギャップが発散することがわかるが，適応性ギャップが 1 に近い問題も知られており，そのような問題に対しては最適な非適応的戦略は適応的戦略と比較してもそれほど悪くはない．

わかることのもう一つは，良い適応的戦略を見つけることの難しさである．上の例において，頂点 a と t の間の辺 1 本 1 本はそれほど良い辺ではない．しかし，そのような辺がたくさん並行に存在することで，全体を見ると a から t へ移動するための長さは高い確率で 0 になることがわかる．良い適応的戦略を構築するには，問題に潜むこのような構造を見つけてやらなければならない．上記の問題例の場合はこのような構造が多重辺として存在しているので簡単な処理で見つけることもできるが，より巧妙な形でこのような構造が隠れている場合は，どのようにすればよいのか明らかではない．

実際，確率的最短路問題に対して最適な適応的戦略を計算することは，NP 困難だけではなく，より難しい#P 困難という計算クラスに属することが Papadimitriou and Yannakakis [1] によって証明されている．#P とは数え上げ問題からなるクラスであり，#P 困難であることはクラス#P のすべての問題以上に難しいこと

を意味している．簡単にいうと，確率的最短路問題の最適な適応的戦略を計算することは，ある種の数え上げをしなければならないぐらい難しいといえる．このことから，確率的最短路問題に対して最適な適応的戦略を多項式時間で計算することは恐らく無理である．よって目標を，なるべく最適に近い適応的戦略を計算することに修正しよう．α を 1 以上の数とし，ある戦略の目的関数値が最適な戦略の目的関数値の α 倍以下であるとき，その戦略のことを α 近似と呼び，α のことを近似比と呼ぶ．$\alpha = 1$ であれば，α 近似戦略は最適な戦略であることを意味するが，それを計算することは難しいので，α がなるべく 1 に近い戦略を計算することが目標となる．

3. 劣モジュラ最適化によるアプローチ

では確率的最短路問題に対して，なるべく良い近似比の戦略を計算するにはどうしたらよいか？ ここでは，Lim et al. [2] によって与えられた劣モジュラ最適化を利用したアルゴリズムを紹介する．

3.1 前提

アルゴリズムの紹介の前に，辺長の確率分布について少し仮定を加える．まず，ここではグラフ内の辺の長さに相関がある場合を考え，シナリオベースで確率分布が与えられるとする．さらに，辺の長さが確率的に変動するという設定を少し修正し，辺の長さは変化しないが辺の存在が確率的に変動するということにする．後者の仮定によって一見問題がだいぶ変わってしまったように思えるが，そんなことはない．確率的に変動する辺長をもつ辺が存在した場合は，その辺の端点を結ぶ多重辺で置き換える．多重辺それぞれの辺長を，元の辺長がとり得る値のいずれかに設定する．多重辺のうちどれかちょうど一つが現れるようシナリオを設定することで，元の確率的な辺長をもつ状況も表現することができる．

まとめると，ここで議論する問題では，入力はグラフ $G = (V, E)$，確定的な辺長 $l\colon E \to \mathbb{R}$，それに k 種類のシナリオである．i 番目のシナリオはグラフ内に現れる辺の集合 $E_i \subseteq E$ と，そのシナリオが発生する確率 p_i から構成される．ある頂点を訪れた際に得られるフィードバックは，その頂点に接続している辺が実際に存在しているかどうか観測した結果である．このように設定を少し変えても，確率的最短路問題は NP 困難であることが証明されている [2].

3.2 探索のための戦略

では，アルゴリズムの説明に入ろう．不確実性を含む最適化問題において良い解を計算するには，探索と活用のバランスをとるのが重要であることは，しばしば指摘されている．探索とは不確実性を減らすために情報を探索するような選択を行うことを意味し，活用とは最適化のうえで良さそうな選択を行うことを意味する．確率的最短路問題についても，この二つのバランスをとることが大事だというのは同様である．

Lim et al. [2] のアルゴリズムでは，探索のための戦略を次のように計算する．まず，辺集合 E の部分集合 E' を次のように定義する．

$$E' = \left\{ e \in E\colon \sum_{i : e \in E_i} p_i \geq 1/2 \right\}.$$

つまり，E' は存在する確率が 1/2 以上の辺からなる集合である．辺集合が E' であるような G の部分グラフ $G' = (V, E')$ を最尤グラフと呼ぶことにする．

また，V の部分集合 $U \subseteq V$ と E の部分集合 $F \subseteq E$ について，$\delta(U; F)$ を F の辺のうち U の頂点に接続しているものの集合と定義する（両端点が U に含まれている辺も $\delta(U; F)$ に含まれる）．さらに $h(U) = \{i = 1, 2, \ldots, k\colon \delta(U; E') \neq \delta(U; E_i)\}$ も定義する．集合 U のすべての頂点を訪問すると $\delta(U; E)$ に含まれる辺の状態を観測できるが，それが E' と食い違っているようなシナリオの集合が $h(U)$ である．

そのうえで，グラフの頂点集合上で集合関数 $f\colon 2^V \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．

$$f(U) = \sum_{i \in h(U)} p_i \quad (\forall U \subseteq V).$$

この関数は，単調劣モジュラ関数と呼ばれる関数クラスに属する．つまり，任意の $U \subseteq U' \subseteq V$ について $f(U) \leq f(U')$ が成り立つという単調性と，任意の $U \subseteq U' \subseteq V$ と任意の $v \in V \setminus U'$ について $f(U \cup \{v\}) - f(U) \geq f(U' \cup \{v\}) - f(U')$ が成り立つという劣モジュラ性をもつ．

最尤グラフ $G' = (V, E')$ 上で s を出発点とするパスのうち，訪問する頂点 U が $f(U) \geq 1/2$ であるようなもののなかで長さ最小のものを求める問題を考える．これは劣モジュラオリエンテーリング問題と呼ばれる（非適応的）最適化問題になっており，NP 困難ではあるが近似精度が理論的に保証された近似アルゴリズムが知られている [3]（正確には文献 [3] で扱われているのは劣モジュラオリエンテーリング問題とはやや異なる問題だが，ほんの少しの修正で文献 [3] のアルゴリズムを劣モジュラオリエンテーリング問題に適

用できる)．アルゴリズムの出力解が達成する目的関数値と最適値の比として定義される近似比は，グラフの頂点数やシナリオの発生確率の対数に関する多項式となっているが，ここでは単に α と記述することにし，詳細は省略する．このアルゴリズムを使って計算したパスに沿って移動し情報を集め，それから始点 s にもう一度戻るのが，探索のための戦略となる．

3.3 適応的アルゴリズムの概要

では，アルゴリズム全体では何をするのかを説明する．まず，3.2 節で説明したように，劣モジュラオリエンテーリング問題を解くことで得られる最尤グラフ上のパス P_1 を計算する．同時に，最尤グラフ上で最短 st 路 P_2 も計算する．P_1 が探索に対応することはすでに触れたが，P_2 に沿って目的地まで行ってしまうのが活用に対応する．

P_1 と P_2 の長さが小さい方を P^* と書くことにしよう．アルゴリズムでは P^* に沿って移動する．ただし，P_1 と P_2 はどちらも最尤グラフ上のパスなので，最尤グラフには存在していた辺が実際には存在していなかったらパスに沿って移動できないこともある．また，移動している最中に，最尤グラフでは存在しないとされていた辺が実際には存在していることを観測することもあるかもしれない．これらの場合には，始点 s に戻ってもう一度はじめからやり直す．ただし，その時点で観測した結果をもとに棄却できるシナリオは削除しておく．これにより，やり直したときに計算する最尤グラフやパス P_1, P_2 はその前の反復とは異なるものが出てくる．これを，終点 t にたどり着くまで繰り返すのがアルゴリズムによって計算される戦略である．

まとめると，次の操作を終点 t にたどり着くまで繰り返す．

1. 最尤グラフ上のパス P_1, P_2 を計算し，長さの小さい方を P^* とする．
2. P^* に沿って移動する．ただし，途中で最尤グラフと異なる状態を観測した場合は中断して始点 s に戻る．$P^* = P_1$ でパスの最後まで移動したらやはり始点まで戻る．始点まで戻ったら，観測と食い違うシナリオを削除する．

3.4 近似比の解析

$m = \max_i 1/p_i$ とし，α を 3.2 節で触れたように P_1 を計算する際に用いた劣モジュラオリエンテーリング問題に対する近似アルゴリズムの近似比とする．すると，上記の戦略の近似比は $O(\alpha \log m)$ であることが証明できる．この証明について説明しよう．

まず，反復回数について解析する．上記の戦略で始点まで戻る作業が発生するのは次のどちらかのケースである．

(i) 途中で最尤グラフと異なる状態を観測した場合
(ii) 最尤グラフから予想される状態を観測し続けながら，P_1 に沿って最後まで移動した場合

これ以外のケースは，P_2 に沿って終点まで移動し，アルゴリズムは終了する．(i) のケースで最尤グラフと異なる状態を観測するというのは，最尤グラフでは存在していた辺が実際には存在しなかったか，最尤グラフでは存在していないとされていた辺が実際には存在したケースである．その定義から，最尤グラフは 1/2 以上の確率で存在する辺によって構成されている．よって，このように最尤グラフと食い違う観測が得られたときには，現在残っているシナリオのうち，半分以上の確率のものを棄却できる．これは (ii) のケースでも同様である．P_1 の定義から，P_1 上のすべての頂点を訪問し，かつ最尤グラフと同様の観測をし続けると，やはり探索開始時点で残っていたシナリオのうち，確率にして半分以上のものを棄却することができる．このことから，アルゴリズムの反復回数は $O(\log m)$ 回であることがわかる．

次に，P^* の長さについて考察する．P^* の長さは，最適な戦略の期待値の $O(\alpha)$ 倍となっていることが証明できる．これを見るために，最適な戦略において，1/2 以上の確率で選ばれる頂点からなる経路 Q を考える．Q が通る辺はすべて必ず最尤グラフに存在することは，その定義から直ちにわかる．よって，Q が終点 t までたどり着いている場合は最尤グラフ上の st 路の一つであることから，最尤グラフ上の最短 st 路 P_2 との間に以下の関係がある．

$$P_2 \text{ の長さ} \leq Q \text{ の長さ}$$

一方，Q が t までたどり着かず他の頂点で終わっている場合には，Q は探索解を計算する際に問いた劣モジュラオリエンテーリング問題の実行可能解の一つとなっている．これは，Q をたどって観測できる辺の状態をすべて観測し，かつ観測結果が最尤グラフで示されているとおりである場合，1/2 以上の確率のシナリオを棄却できることを意味しているからである．よって，この場合は

$$P_1 \text{ の長さ} \leq \alpha \times Q \text{ の長さ}$$

となる．いずれの場合でも，P_1 と P_2 の短い方の経路を指す P^* の長さが Q の長さで抑えられる．また，最適戦略の最適値は，Q の長さの 2 倍以下である．これ

は，最適戦略は 1/2 以上の確率で Q を通ることから示すことができる．以上をまとめると，

$$P^* \text{ の長さ} \leq 2\alpha \times \text{最適戦略の目的関数値}$$

ということができ，先の反復回数の議論と合わせると，アルゴリズムによって計算される戦略が $O(\alpha \log m)$ 近似であることが証明できる．

4. 他の問題の話題

3 節で紹介した劣モジュラ最適化を利用した適応的戦略の設計は，他の被覆型の最適化問題（制約を満たすようないくつかの要素を選択し，目的関数を最小化するようなタイプの問題）にも有効であることが多い．たとえば，確率的に定義される TSP に対して，Gupta et al. [4] はこの手法を用いて適応的アルゴリズムを設計している．

また，著者は論文 [5] で，連結支配集合問題と呼ばれる問題に対して，この手法を用いた適応的アルゴリズムを提案した．連結支配集合問題というのはグラフ上で定義された基本的な組合せ最適化問題の一つであるが，同時に，通信ネットワークの先端技術の一つである無線アドホックネットワークにおいて重要となる仮想バックボーンの構築問題が連結支配集合問題として自然に定式化できることから，通信ネットワーク分野でも活発に研究されている．無線アドホックネットワークは，ネットワーク全体を中央管理する基地局などのインフラを用いずに端末同士で通信することでネットワークを構成するものである．端末も頻繁に移動したり加入・離脱を行うことも想定される．この特徴から，ネットワーク形状に常に不確実性を伴うことが宿命づけられており，適応的最適化の導入も自然である．また，この問題は一種のグラフ探索アルゴリズムと見なすこともできるため，不確実なグラフ上を探索するための戦略を構築する問題と見ることもできる．手法としては 3 節で紹介したアルゴリズムと同様，探索と活用のための戦略を最尤グラフ上で計算しそのどちらかを実行するということを繰り返すものだが，確率的最短路問題の場合とは異なり，活用のための戦略を計算するためにも適切に定義された劣モジュラ関数に対する劣モジュラ最適化問題を解く．

これらの研究成果に共通するのは，入力の確率分布がシナリオベースで与えられることを前提とすることである．確率的最短路問題で各辺の長さが独立に決まる場合などは，シナリオを用いて入力すると m が非常に大きくなる．3 節で紹介した戦略の近似比は m に依存しているので，この場合は良いとはあまりいえない．各辺の辺長が独立な場合に効率的な戦略の計算は，この分野における大きな未解決問題である．

劣モジュラ最適化によるアプローチとは別のアプローチによる成果も多く存在する．たとえば，通常の離散最適化問題でも行われているように，問題を連続緩和し，連続緩和の最適解を丸めることで解を得る手法である．適応的最適化にこのアプローチを適用するためには，最小化問題の場合は最適な適応的戦略の下界を与えるように連続緩和問題を定義する必要がある（最大化問題の場合は下界の代わりに上界を与える必要がある）．この点は，通常の離散最適化よりも複雑な考察が必要になる．また，連続緩和の最適解からいかに戦略を構築するかという点も難しい．このようなアプローチによる成果の例としては文献 [6, 7] などがある．

ほかに近年研究が盛んなのは，確率的な劣モジュラ最適化問題に対する貪欲法に基づいたアプローチである．3 節で紹介したアプローチでは，適応的戦略を構築するために非適応的な劣モジュラ最適化問題を解いていたが，ここでは戦略を構築する対象の問題が劣モジュラ最適化問題であることに注意してもらいたい．Golovin and Krause [8] は，確率的に定義された集合関数について，適応的劣モジュラ性という，通常の劣モジュラ性を拡張した性質を提案した．また，そのような性質をもつ集合関数の最適化問題に対して貪欲法に基づいた適応的戦略が良い近似比を達成することを証明した．劣モジュラ最適化はこの研究以前から機械学習分野で頻繁に応用されていたが，Golovin and Krause [8] はこの新しい概念を能動学習と呼ばれるタスクに適用した．能動学習では，ラベルが付いていないデータからラベル付けするデータを注意深く選んだうえで学習を行うことを目指す．ラベル付けをするデータを選択する過程が適応的劣モジュラ性を持つ集合関数の最適化問題として自然に定式化できることを示した．この研究以降，適応的劣モジュラ関数の最適化について多くの研究が行われている．

5. まとめ

本稿では，適応的最適化の枠組みとアルゴリズム設計のアイデアを紹介した．適応的最適化は通常の最適化を拡張した枠組みであり，技術的にはチャレンジングで興味深い課題である．多くのことがまだ手つかずで残っており，これからも多くの研究が生まれるのではないかと思う．また，実用上も充分有用であることが認知されており，特に機械学習の分野では効率的な

能動学習のためのメジャーなアプローチとして認知されている．オペレーションズ・リサーチの分野でも実際に有効な場面もあるのではないかと考えている．本稿がより多様な場面で適応的最適化が使われるきっかけとなれば幸いである．

謝辞　本稿のテーマである適応的最適化については，JST，さきがけ，グラント番号 JPMJPR1759 の支援を受けて研究を行った．文中で触れた著者による研究成果もこの支援によって得られたものである．

参考文献

[1] C. H. Papadimitriou and M. Yannakakis, “Shortest paths without a map,” *Theoretical Computer Science*, **84**, pp. 127–150, 1991.
[2] Z. W. Lim, D. Hsu and W. S. Lee, “Shortest path under uncertainty: Exploration versus exploitation,” *The Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI)*, 2017.
[3] G. Calinescu and A. Zelikovsky, “The polymatroid Steiner problems,” *Journal of Combinatorial Optimization*, **9**, pp. 281–294, 2005.
[4] A. Gupta, V. Nagarajan and R. Ravi, “Approximation algorithms for optimal decision trees and adaptive TSP problems,” *Mathematics of Operations Research*, **42**, pp. 876–896, 2017.
[5] T. Fukunaga, “Adaptive algorithm for finding connected dominating sets in uncertain graphs,” *IEEE/ACM Transactions on Networking*, **28**, pp. 387–398, 2020.
[6] T. Fukunaga, T. Konishi, S. Fujita and K. Kawarabayashi, “Stochastic submodular maximization with performance-dependent item costs,” *The Thirty-Third AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pp. 1485–1494, 2019.
[7] A. Gupta, R. Krishnaswamy, M. Molinaro and R. Ravi, “Approximation algorithms for correlated knapsacks and non-martingale bandits,” *IEEE 52nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 827–836, 2011.
[8] D. Golovin and A. Krause, “Adaptive submodularity: Theory and applications in active learning and stochastic optimization,” *Journal of Artificial Intelligence Research*, **42**, pp. 427–486, 2011.