ファジィ環境下における無限ステージ意志決定過程

02501655　九州大学　藤田敏治　FUJITA Toshiharu

各ステージにおける評価がファジィで与えられるような決定過程を考える．その推移法則としては，確定的な場合，確率的な場合，ファジィの場合が考えられる．ここでは，それら推移法則の与えられ方に応じてそれぞれ，確定的意志決定過程，確率的意志決定過程，ファジィ意志決定過程と呼ぶことにする．なお最小演算子 $\wedge$，最大演算子 $\vee$ を次のように定義する:

$$a \wedge b := \min(a,b), \quad a \vee b := \max(a,b),$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} a_i := a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n.$$

1　確定的意志決定過程

状態集合を $X = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$, 入力集合を $U = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$ とし，状態推移が $f : X \times U \to X$ で与えられる決定過程を考える．また $x_t \in X$ で時刻 $t = 0, 1, \cdots$ における状態を，$\pi_t \in \Pi := \{\pi \mid \pi : X \to U\}$ で時刻 $t = 0, 1, \cdots$ における決定関数をあらわし R を各ステージにおける $X \times U$ 上の利得をあらわす共通のファジィ集合とし $\mu : X \times U \to [0,1]$ で R のメンバーシップ関数をあらわす．なお，$u_t \in U$, $t = 0, 1, \cdots$ で時刻 t における状態 x_t に対し π_t によりくだされる決定をあらわす (i.e. $u_t = \pi_t(x_t)$)．このとき，初期状態 x_0 を与えた場合の各ステージにおけるファジィ利得の交わりを最大にする問題を考える:

$$\begin{aligned} &\mathop{\mathrm{Sup}}_{\pi_i \in \Pi,\ i=0,1,2,\cdots} [\mu(x_0,u_0) \wedge \mu(x_1,u_1) \wedge \mu(x_2,u_2) \wedge \cdots] \qquad (1) \\ &\text{s.t.} \quad x_t = f(x_{t-1}, u_{t-1}), \quad t = 1, 2, \cdots \\ &\qquad\ \ u_t \in U, \quad t = 0, 1, \cdots. \end{aligned}$$

ここで $\mu^*(x_0)$ を問題 (1) の最適値とすると次の関係式が成り立つ:

$$\mu^*(x_0) = \mathop{\mathrm{Max}}_{u \in U} [\mu(x_0, u) \wedge \mu^*(f(x_0, u))].$$

また $I(i,j) := \{k \mid f(\sigma_i, \alpha_k) = \sigma_j\}$ とし

$$v_{ij} := \begin{cases} \max\{\mu(\sigma_i, \alpha_k) \mid k \in I(i,j)\}, & I(i,j) \neq \emptyset \\ 0, & I(i,j) = \emptyset \end{cases}$$

とおくことにより

$$\mu^*(\sigma_i) = \mathop{\mathrm{Max}}_{j=1,2,\cdots,m} (v_{ij} \wedge \mu^*(\sigma_j)), \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

が得られる．よって，**MINMAX 方程式**:

$$x_i = \bigvee_{j=1}^{n} (v_{ij} \wedge x_j), \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (2)$$

の解 x_i が $\mu^*(\sigma_i)$ に対応することがわかる．即ち，問題 (1) の解は MINMAX 方程式 (2) を解くことにより得られる．なお有限ステージの場合については Bellman & Zadeh [1] により再帰式が導かれており，その再帰式を解いていくことにより最適値及びそれに対応する最適政策が求められる．

2　確率的意志決定過程

前節においては

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t)$$

により状態推移が与えられた．ここでは状態推移が確率的な場合について考える．即ち，システムは条件確率 p により，時刻 $t = 0, 1, 2, \cdots$ における状態を x_t と入力を u_t としたとき

$$x_{t+1} \sim p(\cdot | x_t, u_t)$$

で記述されるものとする．これは時刻 t における状態が x_t，入力が u_t であるときに，時刻 $t+1$ で x_{t+1} という状態に確率 $p(x_{t+1}|x_t, u_t)$ で推移することをあらわす．問題は次のようになる:

$$\begin{aligned} &\mathop{\mathrm{Sup}}_{\pi_i \in \Pi,\ i=0,1,2,\cdots} E[\mu(x_0,u_0) \wedge \mu(x_1,u_1) \wedge \mu(x_2,u_2) \wedge \cdots] \qquad (3) \\ &\text{s.t.} \quad x_t \sim p(\cdot | x_{t-1}, u_{t-1}), \quad t = 1, 2, \cdots \\ &\qquad\ \ u_t \in U, \quad t = 0, 1, \cdots. \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} &E[\mu(x_0,u_0) \wedge \mu(x_1,u_1) \wedge \mu(x_2,u_2) \wedge \cdots] \\ &= \sum_{x_1, x_2, \cdots} [(\mu_0(x_0,u_0) \wedge \mu_1(x_1,u_1) \wedge \mu(x_2,u_2) \wedge \cdots) \\ &\qquad \times p(x_1|x_0,u_0) p(x_2|x_1,u_1) p(x_3|x_2,u_2) \cdots] \end{aligned}$$

である．なお，有限ステージの場合については，新たにパラメーターを導入することにより再帰式を導けることが Iwamoto & Fujita [2] により示されている．ここでも同様に新たなパラメーター $\lambda \in [0,1]$ を導入し次のような問題を考える:

$$\operatorname*{Sup}_{\pi_i \in \Pi,\ i=0,1,2,\cdots} E\left[\lambda \wedge \mu(x_0,u_0) \wedge \mu(x_1,u_1) \wedge \cdots\right] \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & x_t \sim p(\cdot|x_{t-1},u_{t-1}), \quad t=1,2,\cdots \\ & u_t \in U, \quad t=0,1,\cdots. \end{aligned}$$

この問題の最適値を $\mu^*(x_0;\lambda)$ とすると，容易にわかるように $\mu^*(x_0;1)$ が問題 (3) の最適値となる．そして $\mu^*(x_0;\lambda)$ に対して次の関係式が成り立つ:

$$\mu^*(x_0;\lambda) = \operatorname*{Max}_{u\in U} \sum_{x_1} \mu^*(x_1;\lambda \wedge \mu(x_0,u))p(x_1|x_0,u). \quad (5)$$

また

$$w_i^k := \mu(\sigma_i,\alpha_k),$$

$$p_{ij}^k := p(\sigma_j|\sigma_i,\alpha_k)$$

とおくと

$$\mu^*(\sigma_i;\lambda) = \operatorname*{Max}_{k=1,2,\cdots,m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k \mu^*(\sigma_j;\lambda \wedge w_i^k), \quad i=1,2,\cdots,n.$$

よって $f_i(\lambda) := \mu^*(\sigma_i;\lambda)$ とおいて得られる MINMAX 関数方程式:

$$f_i(\lambda) = \bigvee_{k=1}^{m} \left[\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^k f_j(\lambda \wedge u_i^k)\right], \quad i=1,2,\cdots,n$$

を解くことにより問題 (3) の解が求められることがわかる．

3　ファジィ意志決定過程

最後に状態推移がファジィで与えられる場合を考える．システムは X 上のメンバーシップ関数 ν により，時刻 $t=0,1,2,\cdots$ における状態を x_t と入力を u_t としたとき

$$x_{t+1} \simeq \nu(\cdot|x_t,u_t)$$

で記述されるものとする．これは時刻 t における状態が x_t，入力が u_t であるときに，時刻 $t+1$ で x_{t+1} という状態に推移するメンバーシップ (帰属度) が $\nu(x_{t+1}|x_t,u_t)$ で与えられることをあらわす．問題は次のようになる:

$$\operatorname*{Sup}_{\pi_i \in \Pi,\ i=0,1,2,\cdots} F\left[\mu(x_0,u_0) \wedge \mu(x_1,u_1) \wedge \mu(x_2,u_2) \wedge \cdots\right] \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & x_t \simeq \nu(\cdot|x_{t-1},u_{t-1}), \quad t=1,2,\cdots \\ & u_t \in U, \quad t=0,1,\cdots. \end{aligned}$$

ただし F はミニマックス期待値作用素をあらわす．即ち

$$\begin{aligned} & F\left[\mu(x_0,u_0) \wedge \mu(x_1,u_1) \wedge \mu(x_2,u_2) \wedge \cdots\right] \\ = & \bigvee_{x_1,x_2,\cdots} \left[\{\mu(x_0,u_0) \wedge \mu(x_1,u_1) \wedge \mu(x_2,u_2) \wedge \cdots\} \right. \\ & \left. \wedge \{\nu(x_1|x_0,u_0) \wedge \nu(x_2|x_1,u_1) \wedge \cdots\}\right] \end{aligned}$$

である．

問題 (6) に対しても前節同様のアプローチにより次の形の MINMAX 方程式:

$$x_i = \bigvee_{j=1}^{n} (a_{ij} \wedge x_j), \quad i=1,2,\cdots,n$$

を解くことで最適値が求められることが示される．なお有限ステージの場合については Iwamoto & Sniedovich [3] においてより広範囲の問題群に対応する形で取り扱われている．

4　まとめ

以上みてきたように，ファジィ環境下における無限ステージの意志決定過程を考える場合，演算子 $\wedge, \vee$ を含む MINMAX 方程式，あるいは MINMAX 関数方程式が重要な役割を果たす．しかしながら現在までに，こういった方程式に関する結果は特に得られていない．発表当日は，この種の方程式に関する結果もいくつか述べる予定である．

References

[1] Bellman, R.E. and Zadeh, L.A.: Decision-making in a fuzzy environment, Management Science, Vol.17,(1970), B141-B164.

[2] Iwamoto, S. and Fujita, T.: Stochastic decision-making in a fuzzy environment, to appear in J. Operations Res. Soc. Japan.

[3] Iwamoto, S. and Sniedovich, M.: Fuzzy decision-making in a fuzzy environment, under consideration.