1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

探索経路所与の移動目標探索問題に対する確率戦略

1504810 防衛大学校 *宝崎隆祐　1000890 防衛大学校 飯田耕司　防衛大学校 木山雅晶

1．はじめに

探索者の取り得る経路に制約がある場合の移動目標探索問題，いわゆるPath Constrained Search Problemに関しては，Eagleら[1]が探知確率最大化問題について論じ，さらにより複雑な評価尺度として期待利得を取り扱った研究が宝崎・飯田[2]〜[5]によってなされている．探索者の経路が予め与えられている場合のこの問題に対しては，前回の発表[3]で数値解析的なアプローチによる最適解法を提案した．今回は，目標の価値が探知される地域に依存し，また探索者側の戦略として移動地域の探索を行うべきか否かの確率的戦略を考えたより複雑なモデルについて議論する．この問題は動的計画法によるアプローチにより，目標側の任意のパス選択の確率則に応じて探索者側の最適戦略を求めることができる．また，簡単そうに思える本問題が実はＮＰ完全であることについても紹介する．

2．モデルの説明と動的計画法による定式化

離散時間 $t=1,\cdots,T$ において、セルで表現される離散空間 $\{1,\cdots,K\}$ 上を目標は移動している．いま残り探索時間がkである時点をk期とよび、$k=T,T-1,\cdots,1$ での探索を考える．探索者は与えられたセル列（経路）$\{\sigma(k);\ k=T,\cdots,1\}$ 上を移動しながら目標の探知に努力する．目標の取り得る経路（パス）全体を Ω とし、パス ω をとった場合の k 期での位置をセル $\omega(k)$ で表す．初期時点で目標がこのパスを選択する確率 $\{\pi_0(\omega)\mid \pi_0(\omega)\geq 0,\ \sum_{\omega\in\Omega}\pi_0(\omega)=1\}$ は探索者には知られている．セルiに目標が存在する場合の探索による条件付き探知確率を p_i とする．また、k期におけるセルiの探索にはコスト $c_0(i,k)$ がかかるが，目標を探知した場合には価値 $V(i,k)$ を探索者は獲得できる．このような探索状況下において，期待利得（期待獲得価値から期待探索コストを引いたもの）を最大にするために，各期の移動セル上で探索者が探索を実施する確率戦略（ルック戦略）を決定する問題を考える．

ここでk期における移動セル$\sigma(k)$での探索者のルック戦略を $0\leq\varphi(k)\leq 1$ とする．k期において探索者の経路と交差する目標のパスを$\Omega_k=\{\omega\in\Omega|\omega(k)=\sigma(k)\}$とする．また、$k$期の始めにおける目標のパス選択確率$\pi$は，探索実施の結果非探知となった場合，次式で表される事後選択確率$\Lambda_k\pi$となる．ただし，$\delta^k_{\sigma\omega}$はクロネッカーデルタ $\delta_{\sigma(k)\omega(k)}$である．

$$\Lambda_k\pi(\omega)=\frac{\pi(\omega)(1-p_{\sigma(k)}\delta^k_{\sigma\omega})}{1-p_{\sigma(k)}\sum_{\omega\in\Omega_k}\pi(\omega)} \tag{1}$$

k期における探索による探知確率は$p_{\sigma(k)}\sum_{\omega}\pi(\omega)$であり，探知及び非探知による獲得利得はそれぞれ$V(\sigma(k),k)-c_0(\sigma(k),k)$及び$-c_0(\sigma(k),k)$である．以上から，$k$期での目標のパス選択則が$\pi$である時，以後の探索者側の最適ルック戦略による最大期待利得を$f_k(\pi)$とすると以下の漸化式が得られる．

$$\begin{aligned}
f_k(\pi) &= \max_{0\leq\varphi(k)\leq 1}\Bigg[(1-\varphi(k))f_{k-1}(\pi)\\
&\quad +\varphi(k)\left\{p_{\sigma(k)}V(\sigma(k),k)\sum_{\omega\in\Omega_k}\pi(\omega)-c_0(\sigma(k),k)+\left(1-p_{\sigma(k)}\sum_{\omega\in\Omega_k}\pi(\omega)\right)f_{k-1}(\Lambda_k\pi)\right\}\Bigg]\\
&= \max_{0\leq\varphi(k)\leq 1}\left[(1-\varphi(k))f_{k-1}(\pi)+\varphi(k)g_k(\pi)\right]\\
&= \begin{cases} f_{k-1}(\pi), & f_{k-1}(\pi)\leq g_k(\pi) \text{ の場合であり，} \varphi^*(k)=0\\ g_k(\pi), & f_{k-1}(\pi)< g_k(\pi) \text{ の場合であり，} \varphi^*(k)=1\end{cases}
\end{aligned} \tag{2}$$

ただし、$g_k(\pi)=p_{\sigma(k)}V(\sigma(k),k)\sum_{\omega\in\Omega_k}\pi(\omega)-c_0(\sigma(k),k)+(1-p_{\sigma(k)}\sum_{\omega\in\Omega_k}\pi(\omega))f_{k-1}(\Lambda_k\pi)$ とおいた．また，初期条件は $f_0(\pi)=0$である．

3．最適ルック戦略の性質

上の(2)式から，$\varphi^*(k)$は0または1のいわゆるban-ban controlとなることや，もしk期において$\Omega_k = \emptyset$ならばこの期では探索すべきでないことなどを容易に示すことができる．さらに次のような定理が得られる．

定 理 1 任意のk期における目標のパス選択確率π_1, π_2と$0 \le \lambda \le 1$に対し，

$$f_k(\lambda\pi_1 + (1-\lambda)\pi_2) \le \lambda f_k(\pi_1) + (1-\lambda) f_k(\pi_2) \tag{3}$$

が成立する．すなわち，$f_k(\pi)$は$\pi \in \Pi = \left\{\pi \mid \pi(\omega) \ge 0,\ \sum_{\omega\in\Omega} \pi(\omega) = 1\right\}$に対して凸である．

Proof. 省略．

4．問題のＮＰ完全性

まず，$[1,T]$間でのl回（ただし$1 < l < T$）の探索による探知確率最大化問題$MDPGP(\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_T; l)$を考える．この問題のある判定問題は，$\cup_{k=1}^{l}\Omega_{j_k} = \Omega$となる$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_l \le T$が存在するかどうかの被覆可能性問題$SCP(\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_T; l)$と同値となることから，$MDPGP(\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_T; l)$のＮＰ完全性が証明される．さらに，ここでの問題に関する次のような個別問題$MGPGP(\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_T)$を考える．(1)探索コスト，目標の価値は時点，セルにかかわらず一定である．$c_0(i,k) = c_0(const)$, $V(i,k) = V(const) > c_0 T$．(2)目標のいるセルを探索すれば必ず探知するものとする（Perfect Look）．$p_i = 1$．(3)目標のパス選択確率は等確率である．$\pi_0(\omega) = 1/|\Omega|$．(4)$\cup_{k=1}^{T}\Omega_k = \Omega$である． (5)$[1,T]$間での期待利得を最大化する．

このとき，この問題は$MDPGP(\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_T; l)$から多項式時間で変換可能であり，問題のＮＰ完全性が言える．

定 理 2 $MGPGP(\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_T)$はＮＰ完全である．

5．おわりに

ここで議論した問題は探索者側のone-sidedな最適ルック戦略を求めるものであったが，定理1の結果は、初期時点での目標側のパス選択も含んだゲーム問題への拡張も比較的容易であろうことを予想させる．すなわち，連続な凸形ゲームとしての取り扱いである．また，紙数の都合上数値例については当日発表する．

参考文献

[1] Eagle, J.N. and Yee, J.R., An optimal branch-and-bound procedure for the constrained path moving target search problem, *Operations Research*, **38**(1990), 110–114.

[2] 宝崎・飯田, 期待利得尺度の経路制約付き移動目標探索問題, 日本ＯＲ学会1993年度春季研究発表会アブストラクト集(1993), 162–163.

[3] 宝崎・飯田, 探索経路が与えられた場合の移動目標探索問題, 日本ＯＲ学会1993年度秋季研究発表会アブストラクト集(1993), 92–93.

[4] Hohzaki, R. and Iida, K., An optimal search plan for a moving target when a search path is given, *Mathematica Japonica*, **41**(1995), 175–184.

[5] Hohzaki, R. and Iida, K., Path constrained search problem with reward criterion, *J. of Opns. Res. of Japan*, to be appeared.