1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

非凸2次計画問題に対する Semidefinite Programming 緩和

02501520　東京工業大学　*藤江 哲也　FUJIE Tetsuya
01103520　東京工業大学　小島 政和　KOJIMA Masakazu

1　はじめに

(非凸) 2次計画問題 (QP):

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & d^T x + \gamma \\ \text{sub.to} & \pi_k + q_k^T x + x^T Q_k x \le 0 \ (1 \le k \le m) \end{array}$$

(Q_kは (不定値) 対称行列) は, 0-1 整数計画問題 (0-1 IP) を含むため, NP-困難な問題である. 近年, NP-困難な組合せ最適化問題や 0-1 IP に対する Semidefinite Programming(SDP) 緩和が, 内点法の開発 [1, 4] や, 緩和の有効性 [2, 3, 5] といった理由から盛んに研究されている. 本稿では QP に対する SDP 緩和の基本性質を与える. 以下の議論のため, 変数を 1 つ増やし "斉次化" した問題:

$$\text{Min. } c^T y \ \ \text{sub.to } y \in \mathcal{F}, \tag{1}$$

ただし,

$$\mathcal{F} = \left\{ y \in R^{1+n} \,\middle|\, \begin{array}{l} y_0 = 1, \\ y^T P_k y \le 0 \ (1 \le k \le m) \end{array} \right\}$$

を扱う. ここで,

$$c = \begin{pmatrix} \gamma \\ d \end{pmatrix}, P_k = \begin{pmatrix} \pi_k & q_k^T/2 \\ q_k/2 & Q_k \end{pmatrix}$$

である. また,

$$\begin{array}{lll} \mathcal{S}^n & : & n \text{ 次対称行列集合} \\ \mathcal{S}^n_+ & : & n \text{ 次対称半正定値行列集合} \\ \mathcal{S}^n_{++} & : & n \text{ 次対称正定値行列集合} \end{array}$$

とする.

2　緩和問題

2.1　緩和問題 1

いま,

$$C = \begin{pmatrix} \gamma & d^T/2 \\ d/2 & O \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^{1+n}, e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とし, また 2 つの n 次行列 $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ の内積を $A \circ B = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$ と定義する.

QP(1) の SDP による緩和問題は次の通りである:

$$\text{Min. } C \circ Y \text{ sub.to } Y \in \hat{\mathcal{G}}, \tag{2}$$

ただし,

$$\hat{\mathcal{G}} = \left\{ Y \in \mathcal{S}^{1+n}_+ \,\middle|\, \begin{array}{l} Y_{00} = 1, \\ P_k \circ Y \le 0 \ (1 \le k \le m) \end{array} \right\}.$$

そして, $Y \in \hat{\mathcal{G}}$ の第 1 列の集合が QP(1) の緩和問題 (凸計画問題) を与える:

$$\text{Min. } c^T y \ \ \text{sub.to } y \in \hat{\mathcal{F}}, \tag{3}$$

ただし,

$$\hat{\mathcal{F}} = \left\{ y = Y e_0 \,\middle|\, Y \in \hat{\mathcal{G}} \right\}.$$

この緩和法は, Lovász and Schrijver[5] の 0-1 IP に対する緩和法を, QP に対して拡張したものである. (3) が QP(1) の緩和問題であることは, $Y = yy^T$ とおくことにより明らかになる.

2.2　双対性

Shor[6] は, Lagrange の双対問題を用いて, QP(1) の下界を与える次のような問題を提案した:

$$\text{Max. } t_0 \ \ \text{sub.to } t \in T^d, \tag{4}$$

ただし,

$$T^d = \left\{ t \,\middle|\, \begin{array}{l} C - t_0 e_0 e_0^T + \sum_{i=1}^m t_i P_i \in \mathcal{S}^{1+n}_+, \\ t_i \ge 0 \ (1 \le i \le m) \end{array} \right\}.$$

(4) は (2) の双対問題である [1].

2.3　緩和問題 2

不等式 $y^T P y \le 0$, ただし,

$$P = \begin{pmatrix} \pi & q^T/2 \\ q/2 & Q \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^{1+n}$$

が, 条件:

$$Q \in \mathcal{S}_+^n \text{ かつ } \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{y} \le 0 \text{ for } {}^\forall \boldsymbol{y} \in \mathcal{F}$$

を満たすとき, $\mathcal{F}$ の**凸 2 次妥当不等式**とよぶ. $\mathcal{V}$ を $\mathcal{F}$ の凸 2 次妥当不等式の集合とするとき, $\mathcal{F}$ の凸包 co $\mathcal{F}$ は

$$\mathrm{co}\,\mathcal{F} = \bigcap_{\boldsymbol{P} \in \mathcal{V}} \{\boldsymbol{y} \in R^{1+n} \mid y_0 = 1,\ \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{y} \le 0\}$$

で与えられる. 次の緩和問題 (凸計画問題) は, $\mathcal{F}$ から作られる凸 2 次妥当不等式を制約式としたものである:

$$\text{Min. } \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} \ \text{ sub.to } \boldsymbol{y} \in \widetilde{\mathcal{F}}, \tag{5}$$

ただし,

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{ \boldsymbol{y} \;\middle|\; \begin{array}{l} y_0 = 1, \\ \boldsymbol{y}^T \left(\sum_{k=1}^m t_k \boldsymbol{P}_k \right) \boldsymbol{y} \le 0 \\ \text{for } {}^\forall \boldsymbol{t} \ge \mathbf{o} \text{ s.t. } \sum_{k=1}^m t_k \boldsymbol{Q}_k \in \mathcal{S}_+^n \end{array} \right\}$$

3 諸定理

1. $\mathcal{F} \subseteq \widehat{\mathcal{F}} \subseteq \widetilde{\mathcal{F}}$. ■

2. $\widehat{\mathcal{G}}$ が条件:

$\boldsymbol{Y} \in \widehat{\mathcal{G}} \cap \mathcal{S}_{++}^{1+n}$ で, $Y_{00} = 1, \boldsymbol{P}_k \bullet \boldsymbol{Y} < 0$ となるものが存在する.

を満たすとき, 任意の $\boldsymbol{c} \in R^{1+n}$ に対して

$$\inf\{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \widehat{\mathcal{F}}\} = \inf\{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in \widetilde{\mathcal{F}}\}$$

が成り立つ. また, $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathrm{cl}\,\widehat{\mathcal{F}}$($\widehat{\mathcal{F}}$ の閉包) である. ■

$\boldsymbol{y} \in \widetilde{\mathcal{F}}$ が, $\widetilde{\mathcal{F}}$ の **強凸境界点** (strictly convex boundary point) であるとは,

$$\boldsymbol{y}^T \left(\sum_{k=1}^m t_k \boldsymbol{P}_k \right) \boldsymbol{y} = 0 \ \text{ and } \ \sum_{k=1}^m t_k \boldsymbol{Q}_k \in \mathcal{S}_{++}^n$$

なる $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \dots, t_m)^T \ge \mathbf{o}$ が存在することをいう.

3. 任意の $\widetilde{\mathcal{F}}$ の強凸境界点は $\mathcal{F}$ の点である. ■

4 おわりに

QP(1) に線形不等式制約

$$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{y} \equiv \pi_k + \boldsymbol{q}_k^T \boldsymbol{x} \le 0$$

が含まれているとし, その添字集合を K とする. また, S を線形不等式制約から作られる多面体とする. いま,

$$\pi_k + \boldsymbol{q}_k^T \boldsymbol{x} \le 0 \le \pi_k' + \boldsymbol{q}_k^T \boldsymbol{x} \ (k \in K)$$
$$\text{for } {}^\forall \boldsymbol{y} = (1, \boldsymbol{x}^T)^T \in \mathcal{F}$$

なる十分大きい π_k' をとり, $\mathcal{F}$ に制約式

$$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{P}_k' \boldsymbol{y} \equiv (\pi_k + \boldsymbol{q}_k^T \boldsymbol{x})(\pi_k' + \boldsymbol{q}_k^T \boldsymbol{x}) \le 0 \ (k \in K)$$

を加えた新たな制約領域を $\mathcal{F}'$ とする. このとき $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ である. さらに, S の端点 $\boldsymbol{y} = (1, \boldsymbol{x}^T)^T$ が $\widetilde{\mathcal{F}'}$ の点でもあるならば, $\boldsymbol{y}$ は $\widetilde{\mathcal{F}'}$ の強凸境界点である. よって, 定理 3 から $\boldsymbol{y} \in \mathcal{F}'$ がいえる. したがって, S の端点 $\boldsymbol{y}$ について

$$\boldsymbol{y} \in \widetilde{\mathcal{F}'} \Longleftrightarrow \boldsymbol{y} \in \mathcal{F}$$

が成り立つ. これは, $\boldsymbol{y}$ が $\mathcal{F}$ の点でなければ, 緩和された領域 $\widetilde{\mathcal{F}'}$ にも含まれないことを意味する.

参考文献

[1] W. F. Alizadeh, "Interior point methods in semidefinite programming with application to combinatorial optimization," *SIAM Journal on Optimization* 5 (1995) 13–51.

[2] M. X. Goemans and D. P. Williamson, "Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiabilit y problems using semidefinite programming," *Journal of ACM*, to appear.

[3] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver, *Geometric algorithms and combinatorial optimization* (Springer, New York, 1988).

[4] M. Kojima, S. Shindoh and S. Hara, "Interior-point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problems," Research Report #282, Dept. of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, April 1994, Revised April 1995.

[5] L. Lovász and A. Schrijver, "Cones of matrices and set functions and 0-1 optimization," *SIAM J. on Optimization* 1 (1991) 166-190.

[6] N. Z. Shor, "Quadratic optimization problems," *Soviet Journal of Computer and Systems Sciences* 25 (1987) 1-11.