

# 単調な相補性問題に対する修正ニュートン法

奈良先端科学技術大学院大学 \*山下 信雄 YAMASHITA Nobuo  
 福島 雅夫 FUKUSHIMA Masao

## 1 序論

非線形相補性問題は、次式で定義される。

[NCP( $F$ )] Find  $x \in R^n$  such that

$$x \geq 0, F(x) \geq 0, x^T F(x) = 0.$$

ここで、 $F$ は  $R^n \rightarrow R^n$  の連続的微分可能な関数である。

最近、この問題を等価な方程式系や最適化問題に変換して解く方法が活発に研究されている。特に、次の関数  $\phi$  を用いた変換が注目を集めている。

$$\phi(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b.$$

この関数を用いて NCP( $F$ ) と等価な方程式系を

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x_1, F_1(x)) \\ \phi(x_2, F_2(x)) \\ \vdots \\ \phi(x_n, F_n(x)) \end{pmatrix} = 0$$

で表し、メリット関数を

$$\theta(x) = \frac{1}{2} \|\Phi(x)\|^2$$

と表す。  $\Phi$  は微分可能ではないが  $\theta$  は微分可能である。

本発表では、 $F$  が単調関数である NCP( $F$ ) に対する大域的収束するニュートンタイプ法を提案する。この方法では、探索方向を求める部分問題は線形方程式であり、必ず唯一の解をもっている。その解はメリット関数  $\theta$  の降下方向を与える。また、このアルゴリズムは、非退化の仮定が成り立たないときでも、適当な正則性のもとで2次収束する。なお、本発表の詳細については、[3] を参照されたい。

## 2 準備的事項

定義 2.1  $\Psi$  を局所的リプシッツとし、 $\partial\Psi$  は関数  $\Psi$  の劣微分とする。もし、すべての  $v$  に対して、極限

$$\lim_{\substack{H \in \partial\Psi(x+tv') \\ v' \rightarrow v, t \downarrow 0}} Hv'$$

が存在するなら、 $\Psi$  は  $x$  で *semismooth* という。さらに、すべての  $d \rightarrow 0$  とすべての  $H \in \partial\Psi(x+d)$  に対して、

$$Hd - \Psi'(x; d) = O(\|d\|^2)$$

なら、 $\Psi$  を  $x$  で *strongly semismooth* という。

定義 2.2  $\Psi$  を局所的リプシッツとし、 $D_\Psi$  を  $\Psi$  が微分可能となる点の集合とする。このとき、 $\Psi$  の  $x$  での *B-劣微分*  $\partial_B \Psi$  は次式で与えられる。

$$\partial_B \Psi(x) = \lim_{\substack{x^k \in D_\Psi \\ x^k \rightarrow x}} \Psi'(x^k)$$

*semismooth* な関数  $\Psi$  の零点を一般化ニュートン法で求めるとき、解  $x^*$  における *B-劣微分*  $\partial_B \Psi(x^*)$  の要素がすべて正則であれば、アルゴリズムは局所的に超1次収束することが知られている [2]。

以下では、NCP( $F$ ) に対して定義される関数  $\Phi$  と  $\theta$  について述べる。

定義 2.3 NCP( $F$ ) の解  $x^*$  において、もし、すべての  $H \in \partial_B \Phi(x^*)$  が正則ならば、 $x^*$  を  $\Phi$  に関して *BD-正則* と呼ぶ。

定義からわかるように、ある  $i$  に対して  $x_i = 0 = F_i(x)$  をみたす点において関数  $\Phi$  は微分不可能であるが、*B-劣微分*  $\partial_B \Phi$  は存在する [1]。

$\Phi$  に対しては次の性質が示されている。

命題 2.1 [1]

(a) もし、 $F$  がリプシッツ連続ならば  $\Phi$  もリプシッツ連続であり、 $F$  が *semismooth* ならば  $\Phi$  も *semismooth* である。

(b) どの  $F_i$  も  $x$  において2回微分可能で、そのヘシアンが  $x$  においてリプシッツ連続であるとする。そのとき、 $\Phi$  は  $x$  で *strongly semismooth* である。 □

命題 2.2 [1]

(a)  $F$  が微分可能ならば  $\theta$  も微分可能であり、任意の  $H \in \partial_B \Phi(x)$  に対して次式が成り立つ。

$$\nabla \theta(x) = H^T \Phi(x)$$

(b) すべての  $x \in R^n$  に対して,  $\theta(x) \geq 0$  であり,  $\theta(x) = 0$  と  $x$  が  $NCP(F)$  の解であることは等価である.

(c)  $F$  が単調関数ならば,  $\theta$  の停留点は  $NCP(F)$  の解である.  $\square$

### 3 大域的ニュートンタイプ法

以下では,  $F$  は単調写像であると仮定する. この節では,  $F$  が単調であるような  $NCP(F)$  に対するニュートンタイプのアプローチを提案する.

一般化ニュートン法 [2] では,  $\partial_B \Phi(x^k)$  の要素  $H$  をひとつ求め, それに対して線形方程式を解いて探索方向を求めていた. しかし,  $F$  が単調という仮定のみでは,  $H$  は正則とは限らない. そこで,  $H$  を近似した正則な行列  $G$  を構成し, 線形方程式  $Gd = -\Phi(x^k)$  の解を探索方向として用いることを提案する.

正則行列  $G$  を作る方法を説明する. 任意の  $H \in \partial_B \Phi(x)$  は,  $H = D_a + D_b F'(x)$  で表すことができる. ここで,  $D_a = \text{diag}(a)$  は, ベクトル  $a$  に対して,  $a$  の各要素  $a_i$  を対角要素とする対角行列である. この行列は正則とは限らないので, 次に定義する  $\bar{a}_i$  と  $\bar{b}_i$  を用いて,

$$G = D_{\bar{a}+\bar{b}} + D_{\bar{b}+\bar{b}} F'(x)$$

を定める.

$$(\bar{a}_i, \bar{b}_i) = \begin{cases} (\theta(x)/b_i, 0) & \text{if } -\varepsilon < a_i, b_i \leq -\varepsilon, \\ (\tau\theta(x)/b_i, (1-\tau)\theta(x)/a_i), \tau \in [0, 1] & \text{if } a_i \leq -\varepsilon, b_i \leq -\varepsilon, \\ (0, \theta(x)/a_i) & \text{if } a_i \leq -\varepsilon, -\varepsilon < b_i. \end{cases}$$

ここで,  $\varepsilon \in (0, 1 - \sqrt{2}/2)$  である.

**命題 3.1**  $NCP(F)$  の解でない点, すなわち  $\theta(x) > 0$  の点  $x$  において, 上記の方法で定めた  $G$  は正則である.  $\square$

ニュートンタイプ法

ステップ 1: 初期点  $x^0$  とパラメータ  $\rho \in (0, \frac{1}{2}), \beta \in (0, 1)$  を選び  $k := 0$  とする.

ステップ 2:  $x^k$  が終了条件を満たしていれば終了し, そうでなければステップ 3 へ.

ステップ 3:  $H \in \partial_B \Phi(x)$  を選び, 上記の方法で  $G$  を定める.  $Gd = -\Phi(x^k)$  を解いて  $d^k$  を求める.

ステップ 4:  $x^{k+1} := x^k + t_k d^k$  とする. ここで,  $t_k$  は次の式を満たす最小の非負整数  $m$  を用いて  $t_k := \beta^m$  と定める.

$$\theta(x^k + \beta^m d^k) - \theta(x^k) \leq \beta^m \rho \nabla \theta(x^k)^T d^k$$

$k := k+1$  としてステップ 2 へ.  $\square$

命題 3.1 より, ステップ 3 の  $d^k$  は一意的に定まる.

このアプローチが大域的収束性をもつことを証明する. まず, ステップ 4 で求めた  $d$  が  $\theta$  の点  $x$  における降下方向になっていることを示す.

**補題 3.1** もし,  $x^k$  が  $NCP(F)$  の解でなければ, ステップ 4 で得られる  $d^k$  は次の降下条件を満たす.

$$\nabla \theta(x^k)^T d < 0 \quad \square$$

以上の結果より次の大域的収束定理が成り立つ.

**定理 3.1** アプローチによって生み出される点列が集積点をもつなら, その集積点は  $NCP(F)$  の解である.  $\square$

次に, アプローチの収束率の解析をおこなう.

**補題 3.2**  $x^k$  の集積点の 1 つ  $x^*$  が  $\Phi$  に関して  $BD$ -正則な解であれば  $\{x^k\} \rightarrow x^*$  が成り立つ.  $\square$

**補題 3.3**  $\{x^k\}$  の集積点の 1 つ  $x^*$  が  $\Phi$  に関して  $BD$ -正則な解であるとする. また,  $F$  が  $x^*$  のそばでリプシッツ連続であるとする. このとき, 十分大きな  $k$  に対して,  $t_k = 1$  となる.  $\square$

これらの結果より, 次の収束定理を得る.

**定理 3.2**  $\{x^k\}$  の集積点の 1 つ  $x^*$  が  $\Phi$  に関して  $BD$ -正則な解であり,  $F$  は  $x^*$  のそばでリプシッツ連続であるとする. このとき, アプローチは  $x^*$  に超 1 次収束する. さらに, どの  $F_i$  も  $x^*$  で 2 回微分可能でそのヘシアンがリプシッツ連続ならば, アプローチは 2 次収束する.  $\square$

### 参考文献

- [1] De Luca, T., Facchinei, F. and Kanzow, C., "A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems", working paper, University of Roma (1995).
- [2] Qi, L., "Convergence analysis of some algorithms for solving nonsmooth equations", *Mathematics of Operations Research* 18 (1993) 227-244.
- [3] Yamashita, N. and Fukushima, M., "Modified Newton methods for solving semismooth reformulations of monotone complementarity problems", TR-IS-95021, Nara Institute of Science and Technology, Nara, Japan (1995).