PRODUCTION MANAGEMENT MODEL FOR GOODS PRODUCED THROUGH MANY INTERMEDIATES

01401144 関西大学 中井暉久 (NAKAI Teruhisa)

§1. Model and Formulation

原材料から何段階かの中間品を経由して完成品が作られるような製造工程における生産管理モデルを考える。完成品に対する需要予測から、その製造に必要な中間品を無駄なく用意するには各段階でいくらずつ生産すべきかという問題である。

K：工程数

m_k：第k工程で製造される中間品の種類

〈注〉 $k=1$の時は原材料を、$k=K$の時は完成品を示す。

a_{ij}^{k}：第k工程の中間品jを1単位製造するのに消費される第$(k-1)$工程の中間品iの量
$(i=1,\cdots,m_{k-1};\ j=1,\cdots,m_k;\ k=2,\cdots,K)$

仮 (i) $a_{ij}^{k} \ge 0$

(ii) $\forall j, \forall k$に対し、$\exists i_0$; $a_{i_0 j}^{k} > 0$

(iii) $\forall i, \forall k$に対し、$\exists j_0$; $a_{i j_0}^{k} > 0$

$c_{k,i}$：第k工程の中間品iを1単位製造するのに要する第k工程での費用

仮 $c_{k,i} > 0 \quad \forall k, \forall i$

〈注〉第k工程の中間品iの製造において、第$(k-l)$工程$(1\le l\le k-1)$の中間品jを用いる時には、$k-l+1, k-l+2, \cdots, k-1$の各工程にdummy中間品$j$をおいて、
$a_{jj}^{s}=1$, $c_{s,j}>0$ $(s=k-l+1,\cdots,k-1)$
とする。$c_{s,j}$はholding costである。こうすることにより、第k工程の製造においては、第$(k-1)$工程の中間品のみを使用すると考えてよいことになる。

r_i：完成品iの販売単価 $(r_i>0)$

p_i：完成品iの品切れ損失 $(p_i>0)$

X_i：完成品iに対する需要量(r.v.)
$X_i \sim F_i(x)$：分布関数 仮 $F_i(0)=0 \quad \forall i$

$y_{k,i}$：第k工程における中間品iの製造量(決定変数) 仮 $y_{k,i}\ge 0 \quad \forall k, \forall i$

$y_k=(y_{k,1},\cdots,y_{k,m_k})$

$y=(y_1,\cdots,y_K)$ ：生産政策

$R(y)$：政策yによる総期待収益

問題はつぎのようになる：

$$
(\mathrm{I})\left\{
\begin{array}{ll}
R(y)=\sum_{i=1}^{m_K} E\left[r_i(y_{K,i}\wedge X_i)-p_i(X_i-y_{K,i})^+\right] & \\
\qquad -\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{m_k} c_{k,i}\,y_{k,i} \longrightarrow \max_{y} & (1)\\
\text{subject to} & \\
\sum_{j=1}^{m_{k+1}} a_{ij}^{k+1}\, y_{k+1,j} \le y_{k,i} & (2)\\
y_{k,i}\ge 0 \quad (i=1,\cdots,m_k;\ k=1,\cdots,K-1) & (3)
\end{array}
\right.
$$

ただし $a\wedge b=\min(a,b)$; $a^+=\max(a,0)$

§2. Optimal Policy

Lemma 1. 関数$R(y)$は$y_{k,i}$に関して凹関数である。

従って問題(I)は凹計画である。

Lagrange乗数を

$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_{K-1})$, $\lambda_k=(\lambda_{k,1},\cdots,\lambda_{k,m_k})$

とするとLagrangianはつぎのようになる。

$$
\begin{aligned}
L(y;\lambda)=\sum_{i=1}^{m_K}\Big\{ & r_i\int_0^{y_{K,i}} x\,dF_i(x)-p_i\int_{y_{K,i}}^{\infty} x\,dF_i(x)\\
&+(r_i+p_i)y_{K,i}\int_{y_{K,i}}^{\infty} dF_i(x)\Big\}-\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{m_k} c_{k,i}\,y_{k,i}\\
&+\sum_{k=1}^{K-1}\sum_{i=1}^{m_k}\lambda_{k,i}\Big(y_{k,i}-\sum_{j=1}^{m_{k+1}} a_{ij}^{k+1}\, y_{k+1,j}\Big) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Kuhn−Tucker定理より、y^*が最適解である為の必要十分条件が与えられ、それからつぎの諸関係が導出される。

$$y_{1,i}^* > 0 \Rightarrow \lambda_{1,i}^* = c_{1,i} > 0 \qquad (5)$$

$$\Rightarrow y_{1,i}^* = \sum_{j=1}^{m_2} a_{ij}^{2}\, y_{2,j}^* \quad (i=1,\cdots,m_1) \qquad (6)$$

$$y_{k,i}^* > 0 \Rightarrow \lambda_{k,i}^* = c_{k,i}+\sum_{s=1}^{m_{k-1}}\lambda_{k-1,s}^*\, a_{s,i}^{k} > 0 \qquad (7)$$

$$\Rightarrow y_{k,i}^* = \sum_{j=1}^{m_{k+1}} a_{ij}^{k+1}\, y_{k+1,j}^* \quad \begin{pmatrix} i=1,\cdots,m_k \\ k=2,\cdots,K-1 \end{pmatrix} \qquad (8)$$

$$y_{K,i}^* > 0 \Rightarrow (r_i+p_i)\left[1-F_i(y_{K,i}^*)\right] = c_{K,i}+\sum_{s=1}^{m_{K-1}}\lambda_{K-1,s}^*\, a_{s,i}^{K} \qquad (9)$$

$$\Rightarrow y_{K,i}^* = F_i^{-1}\left(1-\frac{c_{K,i}+\sum_{s=1}^{m_{K-1}}\lambda_{K-1,s}^*\, a_{s,i}^{K}}{r_i+p_i}\right) \qquad (10)$$

$$(i=1,\cdots,m_K)$$

(5),(7) 式より順次$\lambda^*_{k,i}$ を求めると、$y^*_{k,i}>0$ の仮定のもとで

$$\lambda^*_{k,i}=C_{k,i}+\sum_{t=1}^{k-1}\sum_{s_1=1}^{m_{k-1}}\sum_{s_2=1}^{m_{k-2}}\cdots\sum_{s_t=1}^{m_{k-t}} C_{k-t,s_t}\,a^{k-t+1}_{s_t s_{t-1}}\,a^{k-t+2}_{s_{t-1}s_{t-2}}\cdots a^{k}_{s_1,i} \tag{11}$$

$$(i=1,\cdots,m_k\ ;\ k=1,\cdots,K-1)$$

が成立する。ここで

$$\lambda^*_{K,i}=C_{K,i}+\sum_{s=1}^{m_{K-1}}\lambda^*_{K-1,s}\,a^{K}_{s,i} \tag{12}$$

と定義すると、(11) は $k=K$ に対しても成立する。(11) 式より $\lambda^*_{k,i}$ はつぎの意味をもつ。

「第 k 工程の中間品 i を1単位製造するのに要する第1～k 工程における必要な中間品の総製造費用」。

さて、(10) 式が意味をもつのは (10) 式の右辺のカッコの中が正、つまり

$$(r_i+p_i-\lambda^*_{K,i})/(r_i+p_i)>0 \tag{13}$$

の時である。そこでつぎの仮定をおく。

[仮定A] $r_i>\lambda^*_{K,i}$ $(i=1,\cdots,m_K)$ (14)
(どの完成品も売れれば正の利益がある)

Lemma 2. [仮定A] のもとで $y^*_{k,i}>0$ for $\forall k,\forall i$ である。

(6),(8),(10) より順次 $y^*_{k,i}$ を求めると、

$$y^*_{k,i}=\sum_{j_1=1}^{m_{k+1}}\cdots\sum_{j_{K-k}=1}^{m_K} a^{k+1}_{ij_1}\,a^{k+2}_{j_1 j_2}\cdots a^{K}_{j_{K-k-1}j_{K-k}} \times F^{-1}_{j_{K-k}}\left(1-\frac{\lambda^*_{K,j_{K-k}}}{r_{j_{K-k}}+p_{j_{K-k}}}\right) \tag{15}$$

$$(i=1,\cdots,m_k\ ;\ k=1,\cdots,K)$$

Theorem 1. [仮定A] のもとで、各中間品の最適生産量は (15) 式で与えられる。その時 (15) 式に含まれる $\lambda^*_{k,i}$ は (11) 式で与えられる。

〈注〉 (6),(8) より (2) 式が等式で成立する。つまり無駄な中間品は作らない。

§3. Example

略

§4. The Case of Finite Capacity

中間品を保管する倉庫に容量制限がある場合を考えよう。この時は、もうけが少なくて場所のみとる商品はあまり製造しない方が良い。

$b_{k,i}$ ：第 k 工程の中間品 i の1単位量当りの体積 $(b_{k,i}>0\quad\forall k,\forall i)$

A_k ：第 k 工程で用いる倉庫の容量

問題は (I) につぎの制約がつく。

$$\sum_{i=1}^{m_k} b_{k,i}\,y_{k,i}\le A_k\quad(k=1,\cdots,K) \tag{16}$$

Lagrange 乗数 μ_k $(k=1,\cdots,K)$ を導入して、§2と同様の議論を展開すると、つぎの諸関係を得る。

$$\lambda^*_{1,i}=c_{1,i}+\mu^*_1 b_{1,i}\quad(i=1,\cdots,m_1) \tag{17}$$

$$\lambda^*_{k,i}=C_{k,i}+\sum_{s=1}^{m_{k-1}}\lambda^*_{k-1,s}\,a^{k}_{s,i}+\mu^*_k b_{k,i} \tag{18}$$

$$(i=1,\cdots,m_k\ ;\ k=2,\cdots,K)$$

$$y^*_{k,i}=\sum_{j=1}^{m_{k+1}} a^{k+1}_{i,j}\,y^*_{k+1,j} \tag{19}$$

$$(i=1,\cdots,m_k\ ;\ k=1,\cdots,K-1)$$

$$y^*_{K,i}=F_i^{-1}\left(1-\frac{\lambda^*_{K,i}}{r_i+p_i}\right)\quad(i=1,\cdots,m_K) \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{m_k} b_{k,i}\,y^*_{k,i}\begin{Bmatrix}=\\ \le\end{Bmatrix}A_k\quad\text{if}\ \mu^*_k\begin{Bmatrix}>\\ =\end{Bmatrix}0 \tag{21}$$

以下、(17)～(21) の関係を満たす $\lambda^*_{k,i}$, $y^*_{k,i}$, μ^*_k を求める政策改良法を提案する。

Step 1: $\mu^*_k=0$ $(k=1,\cdots,K)$ として連立方程式 (17)～(20) を $\lambda^*_{k,i}$, $y^*_{k,i}$ について解く。$S_1\equiv\{k\mid\sum_{i=1}^{m_k}b_{k,i}\,y^*_{k,i}>A_k\}=\phi$ なら、$\{y^*_{k,i}\}$ が最適政策であり、$S_1\neq\phi$ なら、$k\in S_1$ である k に対して μ^*_k の値を少し増加して Step 2 へ進め。

Step 2: 与えられた μ^*_k $(k=1,\cdots,K)$ に対して連立方程式 (17)～(20) を解き

$$S_2\equiv\{k\mid\sum_{i=1}^{m_k}b_{k,i}\,y^*_{k,i}>A_k\ ,\ k\in S_1\}$$
$$S_2'\equiv\{k\mid\sum_{i=1}^{m_k}b_{k,i}\,y^*_{k,i}<A_k\ ,\ k\in S_1\}$$

とおく。$S_2=S_2'=\phi$ ならこの解が最適である。そうでないなら、$k\in\begin{Bmatrix}S_2\\ S_2'\end{Bmatrix}$ なる k に対しては μ^*_k の値を少し $\begin{Bmatrix}\text{増加}\\ \text{減少}\end{Bmatrix}$ して、Step 2 を繰り返せ。