1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

Monge性をもつ重みつき2部グラフでの最適k-割当問題に対する効率的算法

02201680　東京工業大学　繁野麻衣子　SHIGENO Maiko
02201890　東京工業大学　*塩浦 昭義　SHIOURA Akiyoshi

近年, 枝の重みがMonge性を満たす2部グラフでの様々な問題に対し, 盛んな研究がなされており [2, 1], 当学会においても応用例が報告されている [5]. 本稿では最適k-割当問題に対し, 効率的な算法を提案する.

1. 最適k-割当問題

頂点集合を $S=\{1,2,\cdots,n\}, T=\{1,2,\cdots,n\}$, 枝集合を $E=S\times T=\{(i,j):i\in S,\ j\in T\}$ とする完全2部グラフ $(S,T;E)$, 及び各枝 $(i,j)\in E$ の重み $w(i,j)$ が与えられている. このような2部グラフにおいて, ちょうど k 本 $(1\leq k\leq n)$ の枝を持つマッチングで重み最小のものを最適k-割当と呼ぶ. 最適k-割当は $\mathrm{O}(kn^2)$ 時間で求められることが知られている [3].

最適k-割当を求める際に用いる, いくつかの道の定義を行う. 任意のマッチング M に対し, M に属す枝と M に属さない枝が交互に現れる道を交互道と呼ぶ.

頂点集合 $\{i:(i,j)\in M\}, \{j:(i,j)\in M\}$ をそれぞれ $\partial_S M, \partial_T M$ と表す. 任意の2頂点 $i\in S\setminus\partial_S M$ と $j\in T\setminus\partial_T M$ を結ぶ交互道を増加道, 任意の2頂点 $i\in\partial_S M$ と $j\in\partial_T M$ を結ぶ交互道を減少道と呼ぶ. 交互道 P の長さ $l(P)$ を

$$l(P):=\sum\{w(i,j):(i,j)\in P\setminus M\}-\sum\{w(i,j):(i,j)\in P\cap M\}.$$

により定める.

補題 1. M_k を最適k-割当, P^+ (P^-) を M_k の最短な増加道 (減少道) とする. このとき $M_k\triangle P^+$ $(M_k\triangle P^-)$ は最適 $(k+1)$-割当 (最適 $(k-1)$-割当) となる. ここで $\triangle$ は対称差を表す.

2. Monge性

以下, 枝の重みは条件

$$i<i' \text{ かつ } j<j' \Longrightarrow w(i,j)+w(i',j')\leq w(i,j')+w(i',j)$$

を満たすものとする. この性質はMonge性と呼ばれている. 2本の枝 $(i,j),(i',j')$ に対し, $i<i'$ かつ $j>j'$, 又は $i>i'$ かつ $j<j'$ を満たすとき, (i,j) と (i',j') は交差すると言う.

補題 2. どの枝も交差しない, 最適k-割当が存在する.

この補題から, マッチング $\{(l,l):l=1,\cdots,n\}$ は最適n-割当となる. 一方, 最適1-割当を求める場合, すなわち最小重みの枝を求めるときには $\mathrm{O}(n^2)$ 時間を要することに注意する.

補題1と枝の重みのMonge性より次の性質が導かれる.

補題 3. 交差する枝を持たない最適k-割当 M_k に対し, 次の条件を満たす最短な増加道及び減少道 P が存在する: $P\setminus M_k$ に含まれるどの枝も $P\cup M_k$ の枝と交差しない.

枝の交差する組を持たない任意のマッチング M の枝集合を

$$M=\{(i_l(M),j_l(M)):l=1,2,\cdots,|M|\},$$
$$i_1(M)<i_2(M)<\cdots<i_{|M|}(M),$$
$$j_1(M)<j_2(M)<\cdots<j_{|M|}(M),$$

と表す. マッチング M に対して, 枝集合を

$$\{(i_l(M),j_l(M)):l=1,\cdots,|M|\}\cup\{(i_{l+1}(M),j_l(M)):l=1,\cdots,|M|-1\}$$

とする交互道を $P_1(M)$, 枝集合を

$$\{(i_l(M),j_l(M)):l=1,\cdots,|M|\}\cup\{(i_l(M),j_{l+1}(M)):l=1,\cdots,|M|-1\}$$

とする交互道を $P_2(M)$ とする.

系 4. 交差する枝を持たない最適k-割当 M_k に対し, 次の条件を満たす最短な増加道 P が存在する: P は最初と最後の枝を除き, $P_1(M_k)$ か $P_2(M_k)$ のいずれかの交互道に含まれる.

系 5. 交差する枝を持たない最適k-割当 M_k に対し, 次の条件を満たす最短な減少道 P が存在する: P は $P_1(M_k)$ か $P_2(M_k)$ のいずれかの交互

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.

道に含まれる.

この結果, 最適 $(k+1)$-割当 (最適 $(k-1)$-割当) を求めるために調べる増加道 (減少道) は非常に限られたものになり, 次のような算法が導ける.

∘算法 1 (M の枝の数を繰り返し増やす)∘

手順 1 : $M := \emptyset$.

手順 2 : $|M| = k$ ならば終了.

手順 3 : $P^* :=$ 最初と最後の枝を除き, $P_1(M)$ か $P_2(M)$ に含まれる増加道の中で最短なもの.

手順 4 : $M := M \triangle P^*$. 手順 2 へ戻る.

∘算法 2 (M の枝の数を繰り返し減らす)∘

手順 1 : $M := \{(l,l) : l = 1, \cdots, n\}$.

手順 2 : $|M| = k$ ならば終了.

手順 3 : $P^* := P_1(M)$ 又は $P_2(M)$ に含まれる減少道の中で最短なもの.

手順 4 : $M := M \triangle P^*$. 手順 2 へ戻る.

3. 増加道及び減少道の検出

算法 1 及び 2 の時間計算量は手順 3 の実行方法により決まる.

算法 1 においては, 枝集合 $\{(i,j) : i \notin \partial_S M, j \notin \partial_T M, (i,j)$ は M のどの枝とも交差しない $\}$ に含まれる各枝を調べる必要がある. この枝集合は $O(n^2)$ 本の枝を含むので, 手順 3 において $O(n^2)$ 時間を要してしまう.

一方, 算法 2 の 手順 3 は次のように実行できる. まず, $P_1(M)$ に含まれる, 最短な減少道の求め方を示す.

$a_l := P_1(M)$ において $i_1(M)$ と $j_l(M)$ を結ぶ道の長さ $(l = 1, \cdots, |M|)$

$b_l := P_1(M)$ において $i_1(M)$ と $i_l(M)$ を結ぶ道の長さ $(l = 1, \cdots, |M|)$

とすると, 次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} &\min\{l(P) : P \subseteq P_1(M),\ P \text{ は減少道 }\} \\ &= \min_{1 \le r \le |M|} [\min\{l(P) \\ &\qquad : (i_r(M), j_r(M)) \in P \subseteq P_1(M),\ P \text{ は減少道 }\}] \\ &= \min_{1 \le r \le |M|} [\min\{a_l : l \ge r\} - \max\{b_l : l \le r\}]. \end{aligned}$$

値 a_l, b_l $(l = 1, \cdots, |M|)$ 及び $\min\{a_l : l \ge r\}$, $\max\{b_l : l \le r\} (r = 1, \cdots, |M|)$ は $O(|M|)$ 時間で計算出来るので, $P_1(M)$ における最短な減少道は $O(|M|)$ 時間で見つかる. 同様にして $P_2(M)$ における最短な減少道も見つけられるので, $O(|M|)$ 時間で最短な減少道が求められる.

定理 6. Monge 性を満たす完全 2 部グラフでの最適 k-割当は $O(n^2 - k^2) = O((n-k)n)$ 時間で求められる.

4. おわりに

本稿では頂点の数が $|S| = |T| = n$ の場合を扱った. $|S| = n, |T| = m$ $(n \le m)$ の場合については, 最適 n-割当問題は動的計画により $O(mn)$ 時間で解ける [4]. 同様の手法を用いることで, 最適 k-割当は $O(mn + (n-k)n)$ 時間で求められる.

また, 最適 k-割当問題は次の特殊な輸送問題に拡張できる.

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w(i,j)x(i,j) \\ \text{s.t.} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^n x(i,j) \le a_i \quad (i = 1, \cdots, m), \\ & \textstyle\sum_{i=1}^m x(i,j) \le b_i \quad (j = 1, \cdots, n), \\ & \textstyle\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x(i,j) = q, \\ & x(i,j) \ge 0 \quad (i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n). \end{aligned}$$

ここで各 a_i, b_j 及び q は正の整数とし, $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \ge q$ を満たすものとする. 枝の重みが Monge 性を満たすときは, この問題に対しても同様にして $O(n + m + n(\sum_{i=1}^m a_i - q))$ 時間で解ける. この問題に対し, 強多項式時間の効率的な解法の構築が今後の課題である.

参考文献

[1] A. Aggarwal, A. Bar-Noy, S.Khuller, D. Kravets and B. Schieber, Efficient minimum cost matching using quadrangle inequality, *Proceedings of the 33rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 1992, 583-592.

[2] R. Shamir and B. Dietrich, Characterization and algorithms for greedily solvable transportation problems, *Proceedings of the First ACM-SIAM Symposium of Discrete Algorithms*, 1990, 358-366.

[3] 伊理, 藤重, 大山, グラフ・ネットワーク・マトロイド, 産業図書, 1986.

[4] E. L. Lawler, *Combinatorial optimization: networks and matroids*, Holt, Rinehart and Winston, 1976, 207-211.

[5] 岩田, 松井, 組立選択におけるマッチング算法, 日本 OR 学会春期研究発表会予稿集, 1995, 138-139

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.