$M(k)^X/G/1/N$ と $GI/M(k)^Y/1/N$ の系内数分布への統一的アプローチ

01504450　横浜国立大学教育学部　馬場 裕　BABA Yutaka

1. はじめに

任意の状態に依存した到着率をもつ集団到着待ち行列 $M(k)^X/G/1/N$ の定常系内数分布を求めるアルゴリズムを導出する．また状態に依存したサービス率をもつある種の集団サービス待ち行列 $GI/M(k)^Y/1/N$ の定常系内数分布を，$GI/M(k)^Y/1/N$ と $M(k)^X/G/1/N+1$ との関係より導く．

このモデルは，状態に依存した到着率やサービス率をもつ，単一到着および単一サービス待ち行列モデルの系内数分布を扱った [2] や [3] を拡張したものになっており，また特別な場合として [1] の結果を含んでいる．

2. $M(k)^X/G/1/N$ の系内数分布

N : 最大系内数

λ_{kn} : 系内数が n のときサイズ k の集団が系に入る率　$(0 \le n \le N-1, 1 \le k \le N-n)$

$\sum_{k=1}^{N-n} \lambda_{nk} = \Lambda_n \quad (0 \le n \le N-1)$

$b(x)$: サービス時間分布の確率密度関数

$S(t)$: 時刻 t における系内数

$U(t)$: 時刻 t における残りサービス時間

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} P(S(t)=n, u \le U(t) < u+du) \\
&= P(S=n, u \le U < u+du) \\
&= p_n(u)du \qquad (1 \le n \le N)
\end{aligned}
$$

p_0 : 任意時点において系が空である確率

とすると

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_0 p_0 = p_1(0) \\
&-\frac{dp_1(u)}{du} = -\Lambda_1 p_1(u) + \lambda_{01} p_0 b(u) + p_2(0) b(u) \\
&-\frac{dp_n(u)}{du} = -\Lambda_n p_n(u) + \lambda_{0n} p_0 b(u) \qquad (1) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i,n-i} p_i(u) + p_{n+1}(0) b(u) \\
&\qquad (2 \le n \le N-1) \\
&-\frac{dp_N(u)}{du} = \lambda_{0N} p_0 b(u) + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_{i,N-i} p_i(u)
\end{aligned}
$$

となる．

$\int_0^\infty e^{-su} p_i(u) du = P_i^*(s) \quad (1 \le i \le N)$,

$\int_0^\infty e^{-su} b(u) du = B^*(s)$ とおき，(1) の両辺の L.T. をとると

$$
\begin{aligned}
&\Lambda_0 P_0^*(0) = p_1(0) \qquad (\text{ただし } P_0^*(0) = p_0) \\
&(\Lambda_1 - s) P_1^*(s) = \lambda_{01} P_0^*(0) B^*(s) + p_2(0) B^*(s) \\
&\qquad - p_1(0) \\
&(\Lambda_n - s) P_n^*(s) = \lambda_{0n} P_0^*(0) B^*(s) \qquad (2) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i,n-i} P_i^*(s) + p_{n+1}(0) B^*(s) \\
&\qquad - p_n(0) \quad (2 \le n \le N-1) \\
&-s P_N^*(s) = \lambda_{0N} P_0^*(0) B^*(s) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_{i,N-i} P_i^*(s) - p_N(0)
\end{aligned}
$$

を得る．

Lemma 1

$$
p_n(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\lambda}_{k,n-k} P_k^*(0) \quad (n = 1, 2, \ldots, N)
$$

(ただし，$\bar{\lambda}_{kn} = \sum_{i=n}^{k} \lambda_{ki}$)

Lemma 2　平均サービス時間を $1/\mu$ とすると，

$$
\mu \sum_{n=1}^{N} P_n^*(0) = \sum_{n=1}^{N} p_n(0)
$$

Lemma 1, 2 を使って，(2) 式の $p_n(0)$ $(1 \le n \le N)$ を消去した式を導くことができる．

3. $GI/M(k)^Y/1/N$ の系内数分布

N 人までサービスに入ることができ，到着した客は現在サービス中のサービスに入る．

μ_{nk}：n 人サービス中のとき，k 人同時にサービスを終了する率

$\sum_{k=1}^{n}\mu_{nk} = M_n \quad (1 \le n \le N)$

$a(x)$：到着時間間隔分布の確率密度関数

$S(t)$：時刻 t における系内数

$V(t)$：時刻 t における残り到着時間

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} P(S(t)=n, u \le V(t) < u+du) \\ &= P(S=n, u \le V < u+du) \\ &= q_n(u)du \qquad (0 \le n \le N) \end{aligned}$$

とすると，

$$\begin{aligned} -\frac{dq_0(u)}{du} &= \sum_{i=1}^{N}\mu_{ii}q_i(u) \\ -\frac{dq_n(u)}{du} &= \sum_{i=n+1}^{N}\mu_{i,i-n}q_i(u) + q_{n-1}(0)a(u) \quad (3) \\ &\quad - M_n q_n(u) \quad (1 \le n \le N-1) \\ -\frac{dq_N(u)}{du} &= q_N(0)a(u) + q_{N-1}(0)a(u) \\ &\quad - M_N q_N(u) \end{aligned}$$

となる．

$\int_0^\infty e^{-su}q_i(u)du = Q_i^*(s) \quad (0 \le i \le N)$,

$\int_0^\infty e^{-su}a(u)du = A^*(s)$ とおき，(3) の両辺の L.T. をとると

$$\begin{aligned} -sQ_0^*(s) &= \sum_{i=1}^{N}\mu_{ii}Q_i^*(s) - q_0(0) \\ (M_n - s)Q_n^*(s) &= \sum_{i=n+1}^{N}\mu_{i,i-n}Q_i^*(s) \qquad (4) \\ &\quad + q_{n-1}(0)A^*(s) - q_n(0) \\ &\quad (1 \le n \le N-1) \\ (M_N - s)Q_N^*(s) &= q_N(0)A^*(s) + q_{N-1}(0)A^*(s) \\ &\quad - q_N(0) \end{aligned}$$

を得る．

Lemma 3

$$q_n(0) = \sum_{i=n+1}^{N}\bar{\mu}_{i,i-n}Q_i^*(0) \quad (0 \le n \le N-1)$$

Lemma 4 平均到着間隔を $1/\lambda$ とおくと

$$\lambda = \sum_{n=0}^{N} q_n(0)$$

Lemma 5

$$q_N(0) = \lambda - \sum_{n=0}^{N-1} q_n(0) = \lambda - \sum_{i=1}^{N}Q_i^*(0)\sum_{n=0}^{i-1}\bar{\mu}_{i,i-n}$$

Lemma 3, 4, 5 を使って，(4) 式の $q_n(0) \quad (0 \le n \le N)$ を消去した式を導くことができる．

Theorem 6 $GI/M(k)^Y/1/N$ の定常系内数分布を $Q_n^*(0) \quad (0 \le n \le N)$ とすると

$$Q_n^*(0) = \frac{P_{N-n+1}^*(0)}{1-P_0^*(0)} \qquad (0 \le n \le N) \qquad (5)$$

となる．ただし，$P_n^*(0) \quad (0 \le n \le N+1)$ は $M(k)^X/G/1/N+1$ の定常系内数分布で，$\lambda = \mu, \lambda_{nk} = \mu_{N+1-n,k} \quad (1 \le n \le N; 1 \le k \le N+1-n), \Lambda_n = M_{N+1-n} \quad (1 \le n \le N), \lambda_{0n} = 0 \quad (2 \le n \le N), \Lambda_0 = \lambda_{01}$ は任意の正の数，サービス時間分布の LST が $A^*(s)$ としたものである．

4. 系内数分布の計算アルゴリズム

3節の議論より，$M(k)^X/G/1/N$ の定常系内数分布を求めることができれば，$GI/M(k)^Y/1/N$ についても計算できる．系内数分布を求めるアルゴリズムは紙面の関係により省略する．

参考文献

[1] Baba, Y.,"The $M^X/G/1$ queue with finite waiting room", *JORSJ*, 27 (1984) 261-273.

[2] Kijima, M. and Makimoto, N.,"A unified approach to $GI/M(n)/1/K$ and $M(n)/G/1/K$ queues via finite quasi-birth-death processes", *Stochastic Models*, 8 (1992) 269-288.

[3] Yang, P.,"A unified algorithm for computing the stationary queue length distributions in $M(k)/G/1/N$ and $GI/M(k)/1/N$ queues", *Queueing Systems*, 17 (1994) 383-401.