1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

空間的に斉次なブロック構造をもつマルコフ連鎖の定常分布

01605320 東京工業大学 牧本 直樹 MAKIMOTO Naoki

1. はじめに

本稿では，空間的に斉次なブロック構造を持つマルコフ連鎖の定常分布について考察する．このようなマルコフ連鎖は，出生死滅過程や M/G/1，GI/M/1 待ち行列に対する隠れマルコフ連鎖，およびそれらの行列バージョンである M/G/1 型，GI/M/1 型マルコフ連鎖を特殊ケースとして含んでおり，応用上よく現れるものである．Grassman and Heyman [1] は，このマルコフ連鎖の定常分布の性質について考察し，M/G/1 型および GI/M/1 型マルコフ連鎖に対する Neuts [2,3] の理論を統一的に説明するとともに，ガウスの消去法の行列バージョンを利用した数値計算法についても言及している．本稿では，次節でいくつかの基本的な仮定を述べた後，3 節でこのマルコフ連鎖が定常分布を持つための条件を与え，4 節で定常分布の裾の挙動について考察する．

2. 空間的に斉次なブロック構造をもつマルコフ連鎖

次のような推移確率行列をもつ離散時間マルコフ連鎖を考える．

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_0 & \mathbb{B}_1 & \mathbb{B}_2 & \mathbb{B}_3 & \cdots \\ \mathbb{C}_1 & \mathbb{A}_0 & \mathbb{A}_1 & \mathbb{A}_2 & \cdots \\ \mathbb{C}_2 & \mathbb{A}_{-1} & \mathbb{A}_0 & \mathbb{A}_1 & \cdots \\ \mathbb{C}_3 & \mathbb{A}_{-2} & \mathbb{A}_{-1} & \mathbb{A}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

ここで $\mathbb{B}_0$ は $b \times b$，$\mathbb{A}_i$ は $a \times a$ の正方行列であり，また $\mathbb{B}_i$ は $b \times a$，$\mathbb{C}_i$ は $a \times b$ 行列である．各部分行列に対応する状態集合をレベルと呼び，レベルの中での個々の状態をステージと呼ぶ．時点 n での状態をレベル L_n とステージ S_n の組 (L_n, S_n) で表す．以下では，次の仮定をおく．

(AS1) $\mathbb{P}$ は既約で非周期的

(AS2) $\mathbb{A} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{A}_i$ は既約で非周期的な確率行列

(AS3) $\sum_{i=-\infty}^{\infty} |i| \mathbb{A}_i < \infty$

(AS2) より $\mathbb{A}$ に支配されるマルコフ連鎖の定常分布が存在するので，それを $\mathbb{p}$ とする．また (AS3) より $\beta = \sum_{i=-\infty}^{\infty} i\mathbb{A}_i \mathbb{1} < \infty$ となる．さらに，$\mathbb{P}$ がエルゴード的である場合，その定常分布を $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots)$，$\pi_i = (\pi_{(i,1)}, \cdots, \pi_{(i,a)})$，

$$\pi_{(i,j)} = \lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\left((L_n, S_n) = (i, j)\right)$$

とする．

3. エルゴード条件

このマルコフ連鎖が定常分布をもつ，すなわちエルゴード的であるための条件を考える．$T_{(i,j)}$ を状態 (i,j) からレベル 0 への初到達時間とする．$\mathbb{A}_i$ に従ってレベルとステージが推移するセミマルコフ型のランダム・ウォークを考えることによって，$\mathbb{p}\beta < 0$ ならば $0 < D_1 < D_2$ が存在して

$$D_1 i < \mathrm{E}\left(T_{(i,j)}\right) < D_2 i$$

となることがわかる．このことを利用すると，次の結果が得られる．

定理 1 (AS1)～(AS3) を仮定する．このとき，マルコフ連鎖がエルゴード的であるための必要十分条件は

(AS4) $\boldsymbol{p\beta} < 0$ かつ $\sum_{i=1}^{\infty} i\boldsymbol{B}_i < \infty$

である.

4. 定常分布の裾の幾何的減衰

本節では，定常分布 $\boldsymbol{\pi}$ が存在するときに，その分布の裾の幾何的減衰について考える．まず $\boldsymbol{A}(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} z^i \boldsymbol{A}_i$ とし

(AS5) $z \in (\delta_1, \delta_2)$, $\delta_1 < 1 < \delta_2$ に対して $\boldsymbol{A}(z) < \infty$

と仮定する．$\boldsymbol{A}(z)$ の最大固有値を $\chi(z)$，対応する左固有ベクトルを $\boldsymbol{\ell}(z)$ とする．また，定常分布の母関数を

$$\boldsymbol{\pi}(z) = \sum_{i=1}^{\infty} z^i \boldsymbol{\pi}_i$$

とする．$\chi(z)$ が log–convex であることと (AS2) から，方程式 $\chi(z) = 1$ は $z \in (\delta_1, \delta_2)$ に 2 つの解 $z = 1, \eta$ をもつ．(AS4) より $1 < \eta < \delta_2$ である．以下では

(AS6) $\sum_{i=1}^{\infty} \eta^i \boldsymbol{B}_i < \infty$

を仮定する．

定理 2　(AS1)〜(AS6) が成り立つならば，ある $D > 0$ に対して

$$\lim_{z \uparrow \eta} \left(1 - \frac{z}{\eta}\right) \boldsymbol{\pi}(z) = D\boldsymbol{\ell}(\eta)$$

が成立する．

系 1　定理 2 の仮定のもとで

$$\liminf_{n\to\infty} \eta^n \boldsymbol{\pi}_n \le D\boldsymbol{\ell}(\eta) \le \limsup_{n\to\infty} \eta^n \boldsymbol{\pi}_n$$

が成り立つ．

これらの結果より，$\boldsymbol{A}_i$ および $\boldsymbol{B}_i$ の要素が幾何的に減衰していれば，

(CO1) 定常分布は漸近的に率 $\theta = \eta^{-1}$ で幾何的に減衰する

(CO2) 十分大きなレベルに対しては，レベル内での分布が $\boldsymbol{\ell}(\eta)$ に一致する

ことがわかる．

ただし，定理 2 の仮定だけで系 1 の両辺の極限が一致するかどうかはわかっていない．次の結果は，この極限が一致するための 1 つの十分条件である [2].

系 2　ある $K > 0$ が存在して，$i > K$ に対して $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{O}$ ならば，

$$\lim_{n\to\infty} \eta^n \boldsymbol{\pi}_n = D\boldsymbol{\ell}(\eta)$$

が成立する．

η および $\boldsymbol{\ell}(\eta)$ は行列 $\boldsymbol{A}_i$ だけで決まるので，$\boldsymbol{P}$ と同じ構造をもつ大規模マルコフ連鎖の定常分布を数値的に求める場合には，打ち切った先の部分を η や $\boldsymbol{\ell}(\eta)$ を用いて近似することによって，効率的な計算が可能になるであろう．

参考文献

[1] Grassman, W.K. and Heyman, D.P., "Equilibrium distribution of block–structured Markov chains with repeated rows," *J. Appl. Prob.*, **27**, 557–576, 1990.

[2] Neuts, M.F., *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.

[3] Neuts, M.F., *Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications*, Marcel–Dekker Inc., NY, 1989.