1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

多期間資産選択問題に対する内点法の適用

筑波大学社会工学系 竹原 均

摘要：本研究においては，多期間シナリオ木が与えられたもとでの多期間資産選択問題に対して内点法を適用し，その有効性について検討する．

1 多期間下方リスクモデル

図1に示されるようなシナリオツリーが与えられるものとする．時刻tに対応して，シナリオツリー上でのすべての枝の長さは1として，各ノードはrootからの距離としてheightを持つ．実現確率，シナリオの実現値，最小許容収益率，資産評価額等はすべて各ノード情報として管理されるものとする．またリスク尺度についてその時間加法性を仮定し，以下のような目的関数の最小化を想定する．

$$\alpha \sum_{v \in V} (1+d)^{-h(v)} p_v \min(\theta_v - W_s, 0)^k - \sum_{v \in L} p_v W_v \tag{1}$$

ここに
n	資産数
S	ノードの集合
L	leafであるノードの集合
W_v	ノードvでの資産評価額
d	割引率
$h(v)$	node v のheight
θ_v	vでの評価に対するフロアー値
α	リスク回避度

に制約条件は，一般化ネットワークフロー問題の流量保存則と通常のアセットアロケーション問題に対する制約条件の複合となる．ここでも簡単化のために，すべてのノードにおいて投資比率$y \in R^n$が，制約条件

$$\begin{aligned} e^t y &= 1 \\ b_u \geq A y &\geq b_l \\ u \geq y &\geq l \end{aligned} \tag{2}$$

が満たすとする．($b_u, b_l \in R^m$, $A \in R^{m \times n}$, $u, l \in R^n$．以後$x_v \in R^n$をノードvでの投資額，x_pをparentでの投資額，W_0を初期投資額とする．ROOT, ROOT以外のinternalなノード，LEAFでそれぞれ満たされるべき制約は，それぞれ以下(3),(4),(5)となる。

$$\begin{aligned} e^t x_v &= W_0 \\ b_u W_0 \geq A x_v &\geq b_l W_0 \\ u W_0 \geq x_v &\geq l W_0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} r_v^t x_p &= W_v \\ e^t x^s &= W_v \\ b_u \geq A(x_v/W_v) &\geq b_l \\ u \geq x_v/W_v &\geq l \end{aligned} \tag{4}$$

$$r_v^t x_p = W_v \tag{5}$$

2 計算機実験結果

対象資産は9資産とした．MLPMのペナルティー次数は$k=1$として線形計画問題に帰着し，制約条件については空売りの禁止のみとした．シナリオツリーは最初にツリーの高さ(期間数)を4に固定し，その上でツリーの分岐数を3 ～ 10と変化させて，比較的小規模の問題から大規模問題までに対応した．それぞれのツリーのノードに対応したシナリオの実現値は過去10年の実現収益率による．その

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

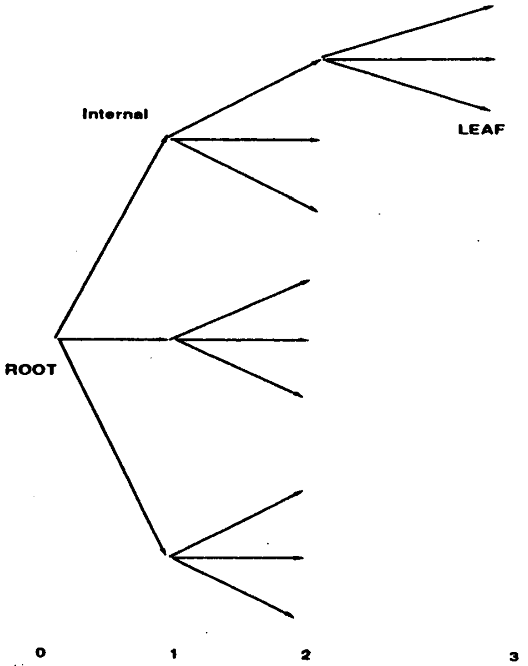

図 1: 多期間シナリオツリー

分岐	ノード数	行数	列数	非零要素	CPU 時間
3	121	280	720	1959	1.16
4	341	765	1785	5269	2.82
5	781	1716	3744	11699	5.65
6	1555	3367	6993	22791	12.37
7	2801	6000	12000	40399	25.29
8	4681	9945	19305	66689	51.97
9	7381	15580	29520	104139	122.68
10	11111	23331	43329	155539	262.38

表 1: 資産選択問題のサイズと最適解を得るのに要した時間

他, リスク許容度 $\alpha = 10.0$, 初期資産 $W_0 = 1.0$, フロアー $\theta_v = W_0 1.055^h(v)$, 割引率 $d = 0.02$ (2%) とした. (使用計算機は IBM RS6000 Model 41T.) 表 1 に計算機実験結果を示す. 図中において行数, 列数, 非零要素は帰着された線形計画問題の制約係数行列のサイズとそこに含まれる非零要素数を示している. また CPU 時間の単位は秒である.

表より明らかにわかるように, ノード数で 1000, 列数で数 1000 程度の問題であれば数秒で最適な資産構成を求めることが可能である. シナリオ数が 10000 の場合, 行数は 20000, 列数は 40000 を超えるがその場合でも 4 ~ 5 分程度の CPU 時間で解が得られている. 空売り制約のみを与えている点, 資金の計画期間中での流出入が無い点など対象問題としては構造が単純であるから, この結果が実務的な状況に必ずしも対応しているとは言えないものの, シナリオに基づく多期間モデルは実用の範囲にあると考えてよいのではないか.

3 結論

シナリオツリーとリスク尺度の時間加法性の仮定のもとで, 多期間の資産選択問題を定式化し, これに対してグラフ理論で用いられるデータ構造と一般化ネットワークフローでの流量保存の考え方をもとに最適化問題を構成した. 計算機実験の結果が示すように, かなり大規模な問題であっても既に技術的には最適ポートフォリオを求めることが可能であり, 現実の問題への適用が望まれる.

参考文献

[1] 竹原, 「下方リスクモデルの概要と実用上の諸問題」 証券アナリストジャーナル **32** No.2 (1994) 1-12.

[2] 竹原, 「アセットアロケーション問題に対する下方リスクモデルの適用と多期間モデルへの拡張」 JAFEE 冬期大会予稿集 (1994) 208-221.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.