1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

最小費用流問題に対する双対スケーリング算法

02201680　東京工業大学　繁野麻衣子　SHIGENO Maiko

1　はじめに

本稿では，最小費用流問題に対する Hassin の双対算法 [2] に近似最適性を導入し，スケーリングを行なうことで多項式時間の算法を提案する．

頂点集合 N，枝集合 $A(\subseteq N\times N)$ からなる有向グラフを $G=(N,A)$ とし，$n=|N|$, $m=|A|$ とする．各枝 $(i,j)\in A$ には流量1単位あたりの費用 $c(i,j)$ と，流量の下限 $l(i,j)$, 上限 $u(i,j)$ が与えられている．各頂点 $i\in N$ の供給量を $b(i)$ とし，$\sum_{i\in N}b(i)=0$ と仮定する．さらに，l, u および b は整数であると仮定し，$U=\max_{(i,j)\in A}\{u(i,j)-l(i,j)\}$ とする．全ての頂点 i で流量保存条件：

$$\sum_{\{j|(i,j)\in A\}}f(i,j)-\sum_{\{j|(j,i)\in A\}}f(j,i)=b(i)$$

を満たし，かつ，全ての枝 (i,j) で容量条件：

$$l(i,j)\leq f(i,j)\leq u(i,j)$$

を満たす f を実行可能流とよぶ．最小費用流問題(MCFP)は，総費用 $\sum_{(i,j)\in A}c(i,j)f(i,j)$ を最小とする実行可能流を求める問題である．

流量保存条件に対する双対変数 π を，頂点のポテンシャルとよぶ．枝 (i,j) の簡約コスト $c(i,j)-\pi(i)+\pi(j)$ を $c^\pi(i,j)$ で表す．ある π に関して，頂点の部分集合 X のカット値 $D^\pi(X)$ を，

$$\sum_{i\in X}b(i)-\sum_{\substack{(i,j)\in\Delta^+X\\ c^\pi(i,j)>0}}l(i,j)+\sum_{\substack{(i,j)\in\Delta^-X\\ c^\pi(i,j)<0}}u(i,j)+\sum_{\substack{(i,j)\in\Delta^-X\\ c^\pi(i,j)\geq 0}}l(i,j)-\sum_{\substack{(i,j)\in\Delta^+X\\ c^\pi(i,j)\leq 0}}u(i,j)$$

とする．ただし，$\Delta^+X=\{(i,j)\in A\mid i\in X,\ j\notin X\}$, $\Delta^-X=\{(i,j)\in A\mid i\notin X,\ j\in X\}$ である．全ての頂点 $i\in X$ のポテンシャルを

$$\varepsilon=\min\{\min_{\substack{(i,j)\in\Delta^+X\\ c^\pi(i,j)>0}}c^\pi(i,j),\ \min_{\substack{(i,j)\in\Delta^-X\\ c^\pi(i,j)<0}}-c^\pi(i,j)\}$$

増加したとき，MCFP の双対目的関数値は $\varepsilon D^\pi(X)$ 増加する．$\varepsilon>0$ より，カット値が正ならば双対目的関数値は改善される．

定理 1 [2] ポテンシャル π が双対最適解であるための必要十分条件は，任意の $X(\subseteq N)$ に対して，$D^\pi(X)\leq 0$. □

Hassin [2] によって以下の双対算法が提案されている．

dual algorithm
begin
　set $\pi(i):=0$ for all $i\in N$;
　while $\exists X$ such that $D^\pi(X)>0$ **do**
　begin
　　select a positive cut X;
　　compute ε;
　　set $\pi(i):=\pi(i)+\varepsilon$ for all $i\in X$
　end
end.

双対算法は，カット値が最大の X を選択しても，擬多項式回の反復が必要となる [2]．これに対し，提案する算法では，カット値が近似的に最大となる X を選択し，近似値のスケーリングを行なうことで多項式時間で双対最適解を得る．Ervolina & McCormick [1] は，最大平均カット値をもつ X を選択することによって，双対算法が多項式回の反復で終了することを示している．彼らの算法も，近似最適性に基づいており，暗にスケーリングを行なっているとみなせる．しかし，最大平均カットを得るには，最大カットを $O(n)$ 回求めなくてはいけない [3].

2　双対近似最適性

双対近似最適性は，Ervolina & McCormick による最大平均カットキャンセル法 [1] で用いられている．本稿では，以下の定義を用いる．

定義　任意の $\delta>0$ に対し，ポテンシャル π が δ-最適であるとは，流量保存条件を満たし，

かつ，

$$l(i,j) - \delta \le f(i,j) \le u(i,j) + \delta$$

および，

$$\begin{cases} c^{\pi}(i,j) > 0 \Rightarrow \\ \quad l(i,j) - \delta \le f(i,j) \le \min\{l(i,j)+\delta, u(i,j)\}, \\ c^{\pi}(i,j) < 0 \Rightarrow \\ \quad \max\{u(i,j)-\delta, l(i,j)\} \le f(i,j) \le u(i,j)+\delta, \\ l(i,j)+\delta < f(i,j) < u(i,j)-\delta \Rightarrow c^{\pi}(i,j) = 0 \end{cases}$$

を満たす fが存在することである．▮

あるδとπに関して，各枝の流量の下限･上限を，

$$l_{\delta}^{\pi}(i,j) := \begin{cases} l(i,j) - \delta & (c^{\pi}(i,j) \ge 0) \\ \max\{u(i,j) - \delta,\ l(i,j)\} & (c^{\pi}(i,j) < 0) \end{cases}$$

$$u_{\delta}^{\pi}(i,j) := \begin{cases} \min\{l(i,j) + \delta,\ u(i,j)\} & (c^{\pi}(i,j) > 0) \\ u(i,j) + \delta & (c^{\pi}(i,j) \le 0) \end{cases}$$

と修正し，任意の $X(\subseteq N)$ に対して，δ-カット値 $D_{\delta}^{\pi}(X)$ を

$$\sum_{i \in X} b(i) + \sum_{(i,j) \in \Delta^- X} l_{\delta}^{\pi}(i,j) - \sum_{(i,j) \in \Delta^+ X} u_{\delta}^{\pi}(i,j)$$

と定義する．

補題 2 ポテンシャルπがδ-最適であるための必要十分条件は，任意の $X(\subseteq N)$ に対して，$D_{\delta}^{\pi}(X) \le 0$. ▮

補題 3 任意のポテンシャルπは，U-最適である．また，$\delta < 1/m$ ならば，δ-最適であるπは双対最適解である．▮

3 双対スケーリング算法

双対スケーリング算法の各スケーリング段階では，δ-最適なポテンシャルを得るまで，δ-カット値が最大の部分頂点集合 Xを見つけ，Xに含まれる頂点のポテンシャルを増加することを繰り返す．δ-カット値が最大の Xは，最大流問題を解くことで得られる [3]．補題3より，$\delta < 1/m$ であるスケーリング段階で，双対最適解が得られる．

dual scaling algorithm
begin
  set $\delta := 2^{\lceil \log U \rceil}$ and $\pi(i) := 0$ for all $i \in N$;
  while $\delta \ge 1/m$ **do**
  begin
    set $\delta := \delta/2$;
    while $\exists X$ such that $D_{\delta}^{\pi}(X) > 0$ **do**
    begin
      find a most positive δ-cut X;
      compute ε;
      set $\pi(i) := \pi(i) + \varepsilon$ for all $i \in X$
    end
  end
end.

スケーリング段階は，$\mathrm{O}(\log(nU))$ 回繰り返される．以下，δ-スケーリング段階の反復回数を解析する．

補題 4 高々$2m$ 回の反復によって，最大δ-カット値は，δ以上小さくなる．▮

スケーリング段階のはじめでは，任意の $X(\subseteq N)$ に対して，$D_{\delta}^{\pi}(X) \le m$ が成立していることより，次の結果を得る．ただし，最大流問題を解く計算量を $\mathrm{M}(n,m)$ とする．

定理 5 双対スケーリング算法は，$\mathrm{O}(m^2 \log(nU)\mathrm{M}(n,m))$ 時間で双対最適解を得る．▮

さらに，[1] で示されている性質を用いると，双対スケーリング算法において，最大δ-カットを求める回数が $\mathrm{O}(m^3 \log n)$ であることがわかる．本算法に多少の修正を施すことによって，$\mathrm{O}(m^3 \log n\, \mathrm{M}(n,m))$ 時間の算法が得られる．

参考文献

[1] T. R. Ervolina and S. T. McCormick, "Two strongly polynomial cut cancelling algorithms for minimum cost network flow," *Discrete Appl. Math.*, 46 (1993) 133–165.

[2] R. Hassin, "The minimum cost flow problem: a unifying approach to dual algorithms and a new tree-search algorithm," *Math. Programming*, 25 (1983) 228–239.

[3] S. T. McCormick and T. R. Ervolina, "Computing maximum mean cuts," *Discrete Appl. Math.*, 52 (1994) 53–70.