1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

J数が2^n-1のときの0-1ナップザック問題の効率的解法

01504364　近畿大学・商経学部　林　芳男　HAYASHI Yoshio

正の整数nとn対の正の実数の組(w_j, p_j) $(j=1, \cdots, n)$と正数Mを与えて作られる0-1ナップザック問題

$$(P)\begin{cases} \text{目的関数} & p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n \to \text{最大化}, & (1.1)\\ \text{制約条件} & w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n \leqq M, & (1.2)\\ & x_j=0\text{又は}1\ (j=1,2,\cdots,n). & (1.3)\end{cases}$$

に対して値関数（0-1ナップザック関数）

$$f(M) \triangleq \mathrm{Max}\{p\cdot x : w\cdot x \leqq M,\ x_j=0\text{又は}1\ (j=1,2,\cdots,n)\} \quad (1.4)$$

と重み関数

$$w(M) \triangleq \mathrm{Max}\{w\cdot x : w\cdot x \leqq M,\ x_j=0\text{又は}1\ (j=1,2,\cdots,n)\} \quad (1.5)$$

が定義される。

与えられた0-1ナップザック問題（P）のL数とは0-1ナップザック関数$f(\cdot)$の0以外の不連続点の個数Lのことであり、J数とは重み関数$w(\cdot)$の0以外の不連続点の個数Jのことである。$w(\cdot)$の不連続点の集合をその重み係数の作る重みの集合と呼び、記号Φ_wで表す。つまり、

$$\Phi_w \triangleq \{W : \text{或る解}x\text{に対して}\ W=w\cdot x\} \quad (1.6)$$

とおく。その要素は与えられた重み係数$\{w_j\ (j=1,2,\cdots,n)\}$から作られる重み又は与えられた0-1ナップザック問題（P）の重みと呼ばれる。その重みを小さいものから大きいものへと順に並べたものを

$$\Phi_w = \{W_0(=0), W_1, W_2, \cdots, W_J\} \quad (1.7)$$

で表すと、その最後の添字Jの値がそのJ数なのである。その各要素は次のようにして小さいものから順番に帰納的に定義していくことができる。

$$W_0 \triangleq 0$$

$$W_1 \triangleq \mathrm{Min}\{w\cdot x : W_0 < w\cdot x,\ x_j=0\text{又は}1\ (j=1,2,\cdots,n)\}$$

$$\vdots$$

$$W_r \triangleq \mathrm{Min}\{w\cdot x : W_{r-1} < w\cdot x,\ x_j=0\text{又は}1\ (j=1,2,\cdots,n)\} \quad (1.8)$$

というふうに与えられる。この重み列の最後のものは

$$W_J = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

である。各重みW_r（$r=0, 1, \cdots, J$）に対応する最大の利益を

$$\overline{P}_r \triangleq \mathrm{Max}\ \{p \cdot x : w \cdot x = W_r,\ x_j = 0 \text{ 又は } 1 \quad (j=1, 2, \cdots, n)\} \tag{1.11}$$

で表す。明らかに

$$f(M) = \mathrm{Max}\ \{\overline{P}_r : W_r \leqq M\}$$

である。kを1からnの任意の数とし、最初のk個の変数に対する0-1ナップザック関数 $f_k(\cdot)$ を任意の数Mに対して

$$f_k(M) \triangleq \mathrm{Max}\ \{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_k x_k : w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_k x_k \leqq M,\ x_j = 0 \text{ 又は } 1\ (j=1, 2, \cdots, k)\}. \tag{1.13}$$

と定義すると、有名な最適性原理による公式

$$f_k(M) = \mathrm{Max}\ \{f_{k-1}(M),\ f_{k-1}(M - w_k) + p_k\} \tag{1.14}$$

が成り立つ。重み係数 $\{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ の作る重み集合の0でない要素の数をJ_k. $f_k(\cdot)$ の0以外の不連続点の個数をL_kで表すと、容易に

$$J_{k-1} + 1 \leqq J_k \leqq 2J_{k-1},\ L_k \leqq J_k \text{（但し、} J_0 = 0\text{）} \tag{1.16}$$

であるから、

$$n \leqq L \leqq J \leqq 2^n - 1 \tag{1.17}$$

という関係が成り立っている。Jが最も小さい $J=n$ の場合は $L=n$ となり、この場合どの右辺の数Mに対しても貪欲解法で最適に解けることが分かっている。J数やL数は与えられた0-1ナップザック問題の或る種の複雑さを表すものであり、これでその問題の難易度が探れるのではないかと思いを巡らしても不思議はないであろう。しかし、この発表では表題の場合も多項式オーダで解けることを示す。ここでは紙面が足りないので詳細は会場で発表します。