1995年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

ＡＨＰにおける不完全一対比較の影響

01404120 立命館大学 長 沢 伸 也 NAGASAWA Shin'ya

1．緒 言

ＡＨＰは評価対象が多くなると一対比較の完全実施が困難になったり、評価が不安定になると考えられる。そこで、著者は、一対比較が不完全な場合のＡＨＰのデータについて、対数線形模型に基づいて対数最小二乗法で解析する方法を提案した[1)]。

本報では、一対比較が不完全で欠測が生ずる場合のＡＨＰにおける欠測の個数やその箇所の影響について検討する。

2．対数線形模型に基づく解析

以下、データｘは対数変換後のものとする。

(a) 完全一対比較データの場合

まず、通常のＡＨＰ、すなわち、完全な一対比較データで個人差を考慮しない場合の対数線形模型に基づく解析方法を示す。これは代表的な統計的官能検査手法であるScheffé の一対比較法の「中屋の変法」で評価者が一人の場合になる[2)]。主効果を$\alpha=\log\omega$、誤差をεとして構造式(1)を仮定する。

$$x_{ij}=(\alpha_i-\alpha_j)+\varepsilon_{ij} \tag{1}$$

表１(a)のデータを線形模型で表すと式(2)になる。

$$\begin{bmatrix} x_{12}\\ x_{13}\\ x_{14}\\ x_{23}\\ x_{24}\\ x_{34}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{12}\\ \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{14}\\ \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{24}\\ \varepsilon_{34}\end{bmatrix} \tag{2}$$

これを式(3)のようにおく。

$$\mathbf{x}=A\,\theta+\varepsilon \tag{3}$$

ただし、$\mathbf{x}$は観測ベクトル、Ａは計画行列、θは未知母数、εは誤差項を表す。すると、未知母数$\theta=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]^T$の最小２乗解は、正規方程式$A^TA\,\theta=A^T\mathbf{x}$を$\Sigma\alpha=0$と連立させて以下のように求まる。

$$\begin{cases}\alpha_1=x_{1\cdot}/4\\ \alpha_2=x_{2\cdot}/4\\ \alpha_3=x_{3\cdot}/4\\ \alpha_4=x_{4\cdot}/4\end{cases} \tag{4}$$

表１　一対比較データ（対数変換後）

(a) 完全一対比較データ

i＼j	1	2	3	4	計
1		x_{12}	x_{13}	x_{14}	$x_{1\cdot}$
2	$-x_{12}$		x_{23}	x_{24}	$x_{2\cdot}$
3	$-x_{13}$	$-x_{23}$		x_{34}	$x_{3\cdot}$
4	$-x_{14}$	$-x_{24}$	$-x_{34}$		$x_{4\cdot}$

(b) 不完全一対比較データ（x_{13}が欠測）

i＼j	1	2	3	4	計
1		x_{12}		x_{14}	$x_{1\cdot}$
2	$-x_{12}$		x_{23}	x_{24}	$x_{2\cdot}$
3		$-x_{23}$		x_{34}	$x_{3\cdot}$
4	$-x_{14}$	$-x_{24}$	$-x_{34}$		$x_{4\cdot}$

(c) 不完全一対比較データ（x_{13}, x_{14}が欠測）

i＼j	1	2	3	4	計
1		x_{12}			x_{12}
2	$-x_{12}$		x_{23}	x_{24}	$x_{2\cdot}$
3		$-x_{23}$		x_{34}	$x_{3\cdot}$
4		$-x_{24}$	$-x_{34}$		$x_{4\cdot}$

(d) 不完全一対比較データ（x_{13}, x_{24}が欠測）

i＼j	1	2	3	4	計
1		x_{12}		x_{14}	$x_{1\cdot}$
2	$-x_{12}$		x_{23}		$x_{2\cdot}$
3		$-x_{23}$		x_{34}	$x_{3\cdot}$
4	$-x_{14}$		$-x_{34}$		$x_{4\cdot}$

なお、誤差ε_{ij}は以下のようになる。

$$\begin{cases}\varepsilon_{12}=x_{12}-(\alpha_1-\alpha_2)\\ \varepsilon_{13}=x_{13}-(\alpha_1-\alpha_3)\\ \varepsilon_{14}=x_{14}-(\alpha_1-\alpha_4)\\ \varepsilon_{23}=x_{23}-(\alpha_2-\alpha_3)\\ \varepsilon_{24}=x_{24}-(\alpha_2-\alpha_4)\\ \varepsilon_{34}=x_{34}-(\alpha_3-\alpha_4)\end{cases} \tag{5}$$

(b) x_{13}が欠測の場合

不完全な一対比較データでx_{13}が欠測の場合、やはり構造式(1)を仮定して表1(b)のデータを線形模型で表すと式(6)になる。

$$\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{14}\\x_{23}\\x_{24}\\x_{34}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{12}\\\varepsilon_{14}\\\varepsilon_{23}\\\varepsilon_{24}\\\varepsilon_{34}\end{bmatrix} \tag{6}$$

これを$\mathbf{x}=A\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\varepsilon}$とおくと、未知母数$\boldsymbol{\theta}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]^T$の最小2乗解は、正規方程式$A^TA\boldsymbol{\theta}=A^T\mathbf{x}$を$\Sigma\alpha=0$と連立させて以下のように求まる。

$$\begin{cases}\alpha_1 &=(3x_{1\cdot}-x_{3\cdot})/8\\ \alpha_2 &=x_{2\cdot}/4\\ \alpha_3 &=(3x_{3\cdot}-x_{1\cdot})/8\\ \alpha_4 &=x_{4\cdot}/4\end{cases} \tag{7}$$

なお、誤差ε_{ij}は以下のようになる。

$$\begin{cases}\varepsilon_{12}=x_{12}-(\alpha_1-\alpha_2)\\ \varepsilon_{14}=x_{14}-(\alpha_1-\alpha_4)\\ \varepsilon_{23}=x_{23}-(\alpha_2-\alpha_3)\\ \varepsilon_{24}=x_{24}-(\alpha_2-\alpha_4)\\ \varepsilon_{34}=x_{34}-(\alpha_3-\alpha_4)\end{cases} \tag{8}$$

(c) x_{13}, x_{14}が欠測の場合

不完全な一対比較データでx_{13}, x_{14}が欠測の場合、やはり構造式(1)を仮定して表1(c)のデータを線形模型で表すと式(9)になる。

$$\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{23}\\x_{24}\\x_{34}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{12}\\\varepsilon_{23}\\\varepsilon_{24}\\\varepsilon_{34}\end{bmatrix} \tag{9}$$

これを$\mathbf{x}=A\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\varepsilon}$とおくと、未知母数$\boldsymbol{\theta}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]^T$の最小2乗解は、正規方程式$A^TA\boldsymbol{\theta}=A^T\mathbf{x}$を$\Sigma\alpha=0$と連立させて以下のように求まる。

$$\begin{cases}\alpha_1 &=(4x_{12}+x_{2\cdot})/4\\ \alpha_2 &=x_{2\cdot}/4\\ \alpha_3 &=(4x_{3\cdot}-4x_{12}-x_{2\cdot})/12\\ \alpha_4 &=(4x_{4\cdot}-4x_{12}-x_{2\cdot})/12\end{cases} \tag{10}$$

なお、誤差ε_{ij}は以下のようになる。

$$\begin{cases}\varepsilon_{12}=0\\ \varepsilon_{23}=x_{23}-(\alpha_2-\alpha_3)\\ \varepsilon_{24}=x_{24}-(\alpha_2-\alpha_4)\\ \varepsilon_{34}=x_{34}-(\alpha_3-\alpha_4)\end{cases} \tag{11}$$

(d) x_{13}, x_{24}が欠測の場合

不完全な一対比較データでx_{13}, x_{24}が欠測の場合、やはり構造式(1)を仮定して表1(d)のデータを線形模型で表すと式(12)になる。

$$\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{14}\\x_{23}\\x_{34}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{12}\\\varepsilon_{14}\\\varepsilon_{23}\\\varepsilon_{34}\end{bmatrix} \tag{12}$$

これを$\mathbf{x}=A\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\varepsilon}$とおくと、未知母数$\boldsymbol{\theta}=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]^T$の最小2乗解は、正規方程式$A^TA\boldsymbol{\theta}=A^T\mathbf{x}$を$\Sigma\alpha=0$と連立させて以下のように求まる。

$$\begin{cases}\alpha_1 &=(3x_{1\cdot}-x_{3\cdot})/8\\ \alpha_2 &=(3x_{2\cdot}-x_{4\cdot})/8\\ \alpha_3 &=(3x_{3\cdot}-x_{1\cdot})/8\\ \alpha_4 &=(3x_{4\cdot}-x_{2\cdot})/8\end{cases} \tag{13}$$

なお、誤差ε_{ij}は以下のようになる。

$$\begin{cases}\varepsilon_{12}=x_{12}-(\alpha_1-\alpha_2)\\ \varepsilon_{14}=x_{14}-(\alpha_1-\alpha_4)\\ \varepsilon_{23}=x_{23}-(\alpha_2-\alpha_3)\\ \varepsilon_{34}=x_{34}-(\alpha_3-\alpha_4)\end{cases} \tag{14}$$

3. 結　言

以上、AHPにおいて一対比較が不完全で欠測が生じた場合の影響を検討した。欠測の対が複数の場合には各行各列で欠測が重ならない方が好ましいことが示唆される。

1)長沢伸也(1994)：日本OR学会1994年度春季研究発表会アブストラクト集、pp.110-120

2)長沢伸也(1995)：人間工学、第31巻特別号