1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

配置禁止領域のある Minimax 型配置問題

02003734 大阪府立大学総合科学部 大角 盛広 (OSUMI Shigehiro)
01204084 大阪大学工学部 塩出 省吾 (SHIODE Shogo)
01005194 大阪大学工学部 石井 博昭 (ISHII Hiroaki)
01302694 大阪府立大学総合科学部 寺岡 義伸 (TERAOKA Yoshinobu)

1 はじめに

本論文では、複数の需要点が存在する平面上に配置禁止領域がある場合において、ひとつの施設を最も遠い需要点までのユークリッド距離が最小になるように配置する問題、すなわち配置禁止領域のある Minimax 型配置問題を考える。

配置禁止領域を考えない場合には、Minimax 型配置問題は総需要点に対する最小被覆円を求める問題と等価であることが知られており、この解は点の個数を n とすると Elzinga-Hearn のアルゴリズムによって $O(n)$ で求められる ([1])。

2 定式化

各需要点を中心とする円形配置禁止領域と、任意の位置の凸多角形及び同じく任意の位置の円形配置禁止領域を考え、問題を以下のように定式化する。

l 個の需要点、$m-l$ 個の円形配置禁止領域、高々 p 本の線分 (頂点) で構成される $n-m$ 個の凸多角形配置禁止領域があるとして、変数を次のように定義する。

$X(x,y)$ ：設置される施設の位置

$a_i(\alpha_i,\beta_i)$, $i=1,\ldots,l$ ：需要点の位置

$a_i(\alpha_i,\beta_i)$, $i=l+1,\ldots,m$ ：円形配置禁止領域の中心

$$F_i : \begin{cases} \text{需要点に付随する禁止領域} & i=1,\ldots,l \\ \text{円形配置禁止領域} & i=l+1,\ldots,m \\ \text{凸多角形配置禁止領域} & i=m+1,\ldots,n \end{cases}$$

とし、

$$F_i = \begin{cases} \{X \mid |X-a_i| < r_i\} \ , \ i=1,\ldots,m \\ \{X \mid L_{ik}(X) = A_{ik}X - c_{ik} < 0 \ , \\ k=1,\ldots,p_j(p_j \le p)\} \ , \\ i=m+1,\ldots,n \end{cases}$$

と表す。このとき全体の禁止領域 F は、

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

と表される。以上のもとで、問題は、

$$P \ : \quad \max_{1\le i\le l} |X-a_i| \longrightarrow \text{最小}$$
$$\text{条件 } X \in \bar{F}$$

と定式化される。

R_i を配置禁止領域 F_i の境界とすると、

$$R_i = \begin{cases} \{X \mid |X-a_i| = r_i\} \ , \ i=1,\ldots,m \\ \bigcup_{k=1}^{p_i}\{X \mid L_{ik}(X) = 0 \ , \\ L_{it}(X) \le 0 \ , \ t=1,\ldots,p_i\} \ , \\ i=m+1,\ldots,n \end{cases}$$

で表される。禁止領域を考えないときの最適解 (最小被覆円の中心) を O とする。O がいずれかの禁止領域に含まれるとき、O を含む連結配置禁止領域を S、S の境界を R とし、S を構成する需要点の添字の集合を、

$$I = \{i \mid F_i \subset S \ , \ i=1,\ldots,n\}$$

とする。需要点の凸包を H とし、この凸包の頂点となる需要点 a_i の添字の集合を J とする。ここで、X から最も遠い需要点は、 a_i , $i \in J$ に含まれることは明らかである。

3 解法

3.1 アルゴリズム

まず配置禁止領域を無視した最適解 O を求める。O が禁止領域 F に含まれる場合は、最適解 X^* は S の境界 R 上にある（後述、解の性質1）ので、すべての R_k , $k \in I$ に対してその R_k 上の実行可能な最適解候補を求め、その中から最適解を選ぶ。R_k 上の最適解候補を選ぶ際、判定基準が Minimax 基準であるため最も遠い需要点が必要である。よって、ある需要点 a_i , $i \in J$ を最も遠い需要点として仮定し、その需要点が最も遠くなるような領域において R_k 上の最適解候補を求め、それを $i \in J$ のすべての場合について行い比較し、最適解を決定する。以下にアルゴリズムを示す。

主アルゴリズム

STEP1 配置禁止領域を考えない Minimax 型配置問題の最適解 O を求め、O が実行可能領域内であれば終了。禁止領域内であれば、**副アルゴリズム１** (S の探索) によって S を構成する集合 I を求め、また需要点の凸包 H を構成する集合 J を求め、**STEP2** へ進む。

STEP2 R_k 上のそこから最も遠い需要点が a_h である最適解候補を**副アルゴリズム２** (最適解候補の探索) によって $k \in I$ 、$h \in J$ のすべての場合について求め、その中から最適解 X^* を選ぶ。

副アルゴリズム１ (S の探索)

O を取り囲む禁止領域 F_s を１つ見つけ、共通部分を持つ禁止領域を求めていく。詳細は講演で述べる。

副アルゴリズム２ (最適解候補の探索)

$k \leq m$ のときと $k > m$ のときとで、最適解の候補は円周上にある場合と線分上にある場合とに分けられるため、それぞれ別の探索アルゴリズムの**副アルゴリズム２.１** と**副アルゴリズム２.２** を使用する。このアルゴリズムの詳細も講演で。

3.2 解の性質

最適解の探索において以下の性質が利用できる。

性質１ O がある禁止領域内に含まれるとき、最適解 X^* は S の境界 R 上にある。

性質２ R_k 上のそこから最も遠い需要点が a_j であるときの最適解候補は、線分 $a_j a_k$ と R_k との交点が実行可能であればその交点になり、実行可能でなければ実行可能区間の端点である。

4 おわりに

本論文では、平面上に円形、凸多角形の配置禁止領域のある Minimax 型単一施設配置問題に対する多項式オーダーの解法を与えた。この解法は、需要点に重みを付けた場合への拡張も可能であろう。なお、この研究は文部省科学研究費基盤研究 (c)(2)08680460 によるものである。

5 謝辞

本研究は、株式会社構造計画研究所の辺見和晃氏の貴重な協力により為されたことを記して感謝したい。

参考文献

[1] J. Elzinga and D.W. Hearn, *Geometric Solutions for Some Minimax Location Problems*, Trans. Sci., Vol. 6 (1972), pp. 379-394.

[2] S. Shiode, *Minimax Facility Location Problem on a Sphere*, Rev. Kobe Univ. Mercant. Marine, No. 37 (1989), pp. 155-158.