

汎用組合せアルゴリズムとしての 制約充足問題 (CSP) に対する近似解法

02401594 京都大学 *野々部 宏司 NONOBE Koji
01001374 京都大学 茨木 俊秀 IBARAKI Toshihide

1 はじめに

現実社会に現れる問題は、数学的に記述し直してみると組合せ問題がその中心となっていることが少なくない。そこで、様々な組合せ問題を一括して解くことができる汎用アルゴリズムが存在すれば、実用上非常に意義のあるものと考えられる。しかし、組合せ問題を厳密に解くことの困難さは理論的にも明らかにされており、大規模な問題例に対して厳密解を求めることは実用上不可能と考えられる。このことから、応用上、良質の近似解を効率良く求めることができる近似アルゴリズムが有用である。

本研究では、組合せ問題に対する汎用近似アルゴリズムを目指して、CSP(制約充足問題)に対するタブー探索に基づくアルゴリズムの開発を試みた。CSPは、与えられた制約を全て満たすような、各変数への値の割当てを求める問題であり、様々な組合せ問題を定式化することができる[3]。また、タブー探索はメタ・ヒューリスティックスと呼ばれる手法の1つであり、多くの組合せ最適化問題に対して有効であるという報告がなされている[1]。

このようなCSPとメタ・ヒューリスティックス(特にタブー探索)を基本的な枠組みとしたアプローチの、汎用アルゴリズムとしての可能性を調べるため、グラフの彩色問題、集合カバー問題、一般化割当て問題、時間割問題等、多様な組合せ問題に対する数値実験を行った。

2 定義

CSPは、それぞれ有限離散領域 D_i を持つ n 個の変数 X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) と、 r 個の制約 $C_l(X_{l_1}, X_{l_2}, \dots, X_{l_{t_l}})$ ($l = 1, 2, \dots, r$) で定義され、全ての制約を満たすように、各変数 X_i に値 $j \in D_i$ を割り当てる問題である。ここで、各制約 C_l は変数 $X_{l_1}, X_{l_2}, \dots, X_{l_{t_l}}$ に対する t_l -項制約であり、それらの変数が同時にとることのできる値の組全てから成る直積 $D_{l_1} \times D_{l_2} \times \dots \times D_{l_{t_l}}$ の部分集合である。全ての制約を満たすような値の割当てを実行可能解と呼ぶ。

ここで、変数 X_i と値 $j (\in D_i)$ の組それぞれに対して、値変数 x_{ij} を

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{変数 } X_i \text{ が値 } j \text{ をとる,} \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}$$

と定義し、割当てを $\sum_{i=1}^n |D_i|$ 次元の 0-1 ベクトル $\mathbf{x} = (x_{ij} \mid i = 1, 2, \dots, n, j \in D_i)$ で表す。このとき、

$$\sum_{j \in D_i} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

が成立すれば、全ての変数 X_i に対して値が 1 つ割当てられていることになる。

CSP の問題例が与えられたとき、その各制約 C_l をいくつかの線形不等式で表し、全制約を

$$\sum_{i,j} a_{h,ij} x_{ij} \leq b_h, \quad h = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

と記述することができるので、CSP を 0-1 計画問題とみなすこともできる。どちらの表現がより有効であるかは、CSP が対象とする問題によるが、OR に現れるような問題では、線形不等式表現が適していることが多い。

3 アルゴリズム

3.1 基本的枠組み

タブー探索中、式(1)を満たす割当てから成る探索空間 X^* を考える。また、 $\mathbf{x} \in X^*$ の近傍 $N(\mathbf{x})$ を、ある1つの変数 X_i の値 j を他の値 j' に変えることによってできる割当て $\mathbf{x}(x_{ij'} \leftarrow 1)$ の全てとする。また、ペナルティ関数を

$$p(\mathbf{x}) = \sum_h w_h \max \left(\sum_{i,j} a_{h,ij} x_{ij} - b_h, 0 \right), \quad (3)$$

とすれば本来決定問題である CSP を最小化問題

$$\begin{aligned} & \text{minimize } p(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to } \mathbf{x} \in X^*, \end{aligned} \quad (4)$$

として扱うことができる。すなわち、ペナルティ関数値が0であるような解 $\mathbf{x} \in X^*$ が存在すること、CSP が実行可能解を持つことは同値である。ここで、各制約に対する重み $w_h > 0$ は効果的な探索を行うために慎重に決定されなくてはならない。

タブー探索の基本的要素である短期メモリ (タブーリスト) は、各反復において値が1から0に変わった値変数を再び1にすることを一定期間禁止することで実現する。

この他、より広範な問題をより効率的に解くために以下のような手法を取り入れる。

3.2 目的関数の組み込み

目的関数 $f(\mathbf{x})$ を持った組合せ最適化問題を CSP の枠組みで扱うために、最小化問題 (4) の代わりに次のような最小化問題を考える。ただし、扱う問題は $f(\mathbf{x})$ の最小化問題とし、簡単化のため $f(\mathbf{x})$ は線形、係数は整数とする。

$$\begin{aligned} \text{minimize } & p(\mathbf{x}) + w_o \left\{ \max(f(\mathbf{x}) - z, 0) \right. \\ & \left. + \theta \min(f(\mathbf{x}) - z, 0) \right\} \quad (5) \\ \text{subject to } & \mathbf{x} \in X^*. \end{aligned}$$

ここで、 z は (現在の暫定値 z') - 1, $w_o > 0$ は目的関数に対する重み, $0 \leq \theta \leq 1$ はプログラムパラメータである。 $\theta = 0$ とすれば “現在の暫定値 z よりも目的関数値が小さくなくてはならない” といった制約を加えたことになり、いわゆる目的関数固定法となる。逆に、 $\theta = 1$ とすれば、ペナルティ関数に目的関数を直接加えただけの単純な方法となる。 $\theta = 0, 0.5,$ 及び 1 の場合の目的関数 $f(\mathbf{x})$ に対するペナルティを図1に示す。また、 w_o の決定も w_h と同様、探索能力を大きく左右する重要なパラメータであり、探索中の解の振舞いに応じて調節する機能を加えている。

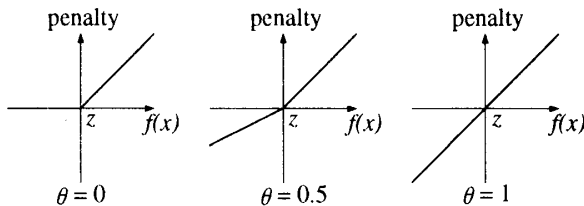


図1. $\theta = 0, 0.5$ 及び 1 の場合の $f(\mathbf{x})$ に対するペナルティ

3.3 Swap 近傍の導入

現在の解 \mathbf{x} が $x_{i_1 j_1} = 1$ と $x_{i_2 j_2} = 1$ を満たすとき、ある2つの変数 X_{i_1}, X_{i_2} の値 j_1, j_2 を交換する

ことによって得られる解 $\mathbf{x}(x_{i_1 j_2} \leftarrow 1, x_{i_2 j_1} \leftarrow 1)$ を \mathbf{x} の近傍に加える。これにより探索能力は向上すると考えられるが、近傍の大きさが $O(n^2)$ となるため、

- first 改善とする。
- $N(\mathbf{x})$ 内に改善解が存在しない時のみ swap 近傍も調べる。
- swap を行う変数を、変数集合のある部分集合内に限定する。
- 何らかの基準により、近傍を削減する (次節参照)。

等の、計算時間を削減するための工夫をしなくてはならない。

3.4 近傍の削減

より効率的な探索を行うために、現在の解から、

- 現在満たされていない制約に関係している変数
- 値を変えることによって、現在満たされていないある制約を満足する (ペナルティを減らす) ことが可能な変数

等の、適当な基準を満たす変数の値を変えることによって得られる解のみを近傍に含める。

4 数値実験

汎用アルゴリズムとしての性能を調べるため、多くの組合せ問題、及び組合せ最適化問題に対して数値実験を行い、多くの問題において多少時間はかかるものの従来の専用アルゴリズムと同程度の解を得ることができた。なお、計算結果の詳細は当日発表させて頂く。

参考文献

- [1] Glover, F., “Tabu search fundamentals and uses”, Technical Report, University of Colorado (1995).
- [2] Nonobe, K. and Ibaraki, T., “Tabu search Approach to CSP (Constraint Satisfaction Problem) as a general problem solver”, Technical Report, Kyoto University (1996).
- [3] Tsang, E., *Foundations of constraint satisfaction*, Academic Press, London, 1993.