

DEAのクロス効率値とファジィ測度-ショケ積分モデルによる 最良評価、平均評価およびその中間の評価

会員番号 01306420 専修大学 高萩栄一郎 TAKAHAGI Eiichiro

1 はじめに

DEAは、あるDMUにとって最も都合の良い入出力係数でそのDMUを評価するものである。(最良評価) そのとき得られた入出力係数は、そのDMUが目指している入出力関係の方向と考へ、そのDMUの評価方法と考へられる。したがって、ある種の自己評価とも考へられる。また、あるDMUの評価方法で他のDMUの効率値を測定したものはクロス効率値と呼ばれている。[1]そこで、あるDMUについて、すべてのDMUの入出力係数で評価した効率値の平均は、その対象となるDMU内(業界内)の平均の評価といえるだろう。本稿では、ファジィ測度-ショケ積分モデルを使い、パラメータ ξ による最良評価と平均の評価および最悪評価の中間の評価方法を提案する。

2 DEA

一般的な定義にしたがって、DEAを定義する。
 DMU_o : o 番目のDMU、 $o = 1, 2, \dots, n$
 x_{io} : DMU_o の i 番目の入力値(非負)、 $i = 1, \dots, m$
 y_{jo} : DMU_o の j 番目の出力値(非負)、 $j = 1, \dots, s$
 v_{io} : DMU_o の i 番目の入力項目への係数
 u_{jo} : DMU_o の j 番目の出力項目への係数
 θ_{ao} : DMU_o の入出力係数での DMU_a のクロス効率値
 通常のDEAのD効率値(θ_{oo})および DMU_o の入出力係数(v_{io}, u_{jo})は、各 o について、次の数理計画法の問題を解くことにより得られる。

$$\text{最大化: } \theta_{oo} = \frac{\sum_{j=1}^s u_{jo}y_{jo}}{\sum_{i=1}^m v_{io}x_{io}} \quad (1)$$

$$\text{制約条件: } \frac{\sum_{j=1}^s u_{jo}y_{ja}}{\sum_{i=1}^m v_{io}x_{ia}} \leq 1, a = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$v_{io}, u_{jo} \geq 0, \forall i, j \quad (3)$$

クロス効率値 θ_{ao} は、次式で得られる。

$$\theta_{ao} = \frac{\sum_{j=1}^s u_{jo}y_{ja}}{\sum_{i=1}^m v_{io}x_{ia}} \quad (4)$$

ξ	意味
1	最大値による評価(D効率値)
⋮	最大値と平均値の中間の評価
0.5	平均値による評価
⋮	平均値と最小値の中間の評価
0	最小値による評価

表 1: ξ と評価の関係

3 ファジィ測度-ショケ積分モデルによるクロス効率値の集計

ファジィ測度-ショケ積分モデルを使うことにより、最大値、平均値、最小値の中間の評価[4]ができる。

そこで、 DMU_a の個々のクロス効率値 $\theta_{a1}, \dots, \theta_{an}$ をファジィ測度-ショケ積分モデルの集計関数 $f_{\xi, n} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ を用いて、 DMU_a の(総合)評価値 θ_a^* を求める。(式(5)) ξ は、評価のパラメータで、表1のように、 ξ を変化させることにより、最大値、平均値、最小値の中間の評価を行うことができる。 $h(i)$ は、 $\theta_{a1}, \dots, \theta_{an}$ の中で、 i 番目に大きい値である。

$$\begin{aligned} \theta_{\xi, a}^* &= f_{\xi, n}(\theta_{a1}, \dots, \theta_{an}) \quad (5) \\ &= \phi_s\left(\frac{1}{n}\right)(h(1) - h(2)) + \phi_s\left(\frac{2}{n}\right)(h(2) - h(3)) + \dots \\ &+ \phi_s\left(\frac{n-1}{n}\right)(h(n-1) - h(n)) + \phi_s(1)(h(n)) \end{aligned}$$

$$\phi_s : [0, 1] \rightarrow [0, 1], s \in [0, +\infty] \quad (6)$$

$$\phi_s(u) = \begin{cases} [u] & \text{if } s = 0 \\ u & \text{if } s = 1 \\ 1 - [1 - u] & \text{if } s = +\infty \\ (s^u - 1)/(s - 1) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{where } [u] &= \begin{cases} 1 & \text{if } 0 < u \leq 1 \\ 0 & \text{if } u = 0 \end{cases} \\ s &= ((1/\xi) - 1)^2 \quad (8) \end{aligned}$$

4 入出力係数の一意性

$\theta_{oo} = 1$ となる DMU_o の入出力係数 u_{io}, v_{jo} は、一般に一意に決まらない。[1][3]等ていくつかの解決法が提案

されているが、本モデルでは、以下の方法を提案する。

まず、 $\theta_{oo} = 1$ となる条件を入れたサブモデルを作成し、 o を除く各 a について、その効率値、および係数を求める。サブモデルの変数には、肩字 S を付ける。

$$\text{最大化: } \theta_{aa}^S = \left(\sum_{j=1}^s v_{ja}^S y_{ja} \right) / \left(\sum_{i=1}^m u_{ia}^S x_{ia} \right) \quad (9)$$

$$\text{制約条件: } \left(\sum_{j=1}^s v_{ja}^S y_{jb} \right) / \left(\sum_{i=1}^m u_{ia}^S x_{ib} \right) \leq 1, \quad (10)$$

$$b = 1, \dots, o-1, o+1, n$$

$$\left(\sum_{j=1}^s v_{ja}^S y_{jo} \right) / \left(\sum_{i=1}^m u_{ia}^S x_{io} \right) = 1 \quad (11)$$

$$v_{ia}^S, u_{ja}^S \geq 0, \forall i, j \quad (12)$$

これは、[2]の最大値により修正クロス効率値を求めることに対応している。このサブモデルのクロス効率値は、

$$\theta_{ba}^S = \left(\sum_{j=1}^s u_{ja}^S y_{jb} \right) / \left(\sum_{i=1}^m v_{ia}^S y_{ib} \right), \quad (13)$$

$$b = 1, \dots, o-1, o+1, \dots, n$$

となる。§3と同じ ξ を用い、次式で、元のモデルで一意に決まらなかったクロス効率値を求める。

$$\theta_{ao} = f_{\xi, n-1}(\theta_{a1}^S, \dots, \theta_{a, o-1}^S, \theta_{a, o+1}^S, \dots, \theta_{an}^S) \quad (14)$$

もし、サブモデルで、 $\theta_{aa}^S = 1$ となるDMUが存在したときは、 θ_{ba}^S は、一意に定まらない。そのときは、 DMU_a の効率値を1とする制約を加えたサブモデルのサブモデルを作成し、再帰的にクロス効率値を求めていく。

5 数値例

数値例として、図1に、[2]の東京都の区立図書館の例を示す。入力変数は、床面積、蔵書数、職員数、人口で出力変数は、登録者数、貸出冊数である。同じD効率である目黒、港、文京での違いや、中央の評価方法(ξ)により大きな差異があることなどが読み取れる。

参考文献

- [1] T.R. Sexton et al. Data Envelopment Analysis: Critique and Extensions, in R.H. Silkman (ed.) Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis, 73-105(1986).
- [2] 枇々木則雄, DEAにおける修正クロス効率値を1つに決める方法, 慶應義塾大学理工学部管理工学科テクニカルレポート, No.95004(1995).
- [3] 枇々木則雄, DEAにおけるクロス効率値を用いた評価法, 慶應義塾大学理工学部管理工学科テクニカルレポート, No.95005(1995).
- [4] 高萩栄一郎, λ ファジィ測度とシヨケ積分を利用した最大値・平均値・最小値の中間の方法 -重要度を考慮した3つの方法-, 第11回ファジィシステムシンポジウム講演論文集, 日本ファジィ学会, 439-442, 沖縄, 1995.
- [5] 刀根薫, 経営効率性の測定と改善-包絡分析法DEAによる-, 日科技連, 1993.
- [6] 塚本弥八郎, 不確実性を伴う意思決定問題のファジィ測度論による分析, 「ファジィ理論と人文社会科学」(講座ファジィ 14), 日刊工業新聞社, 1994.

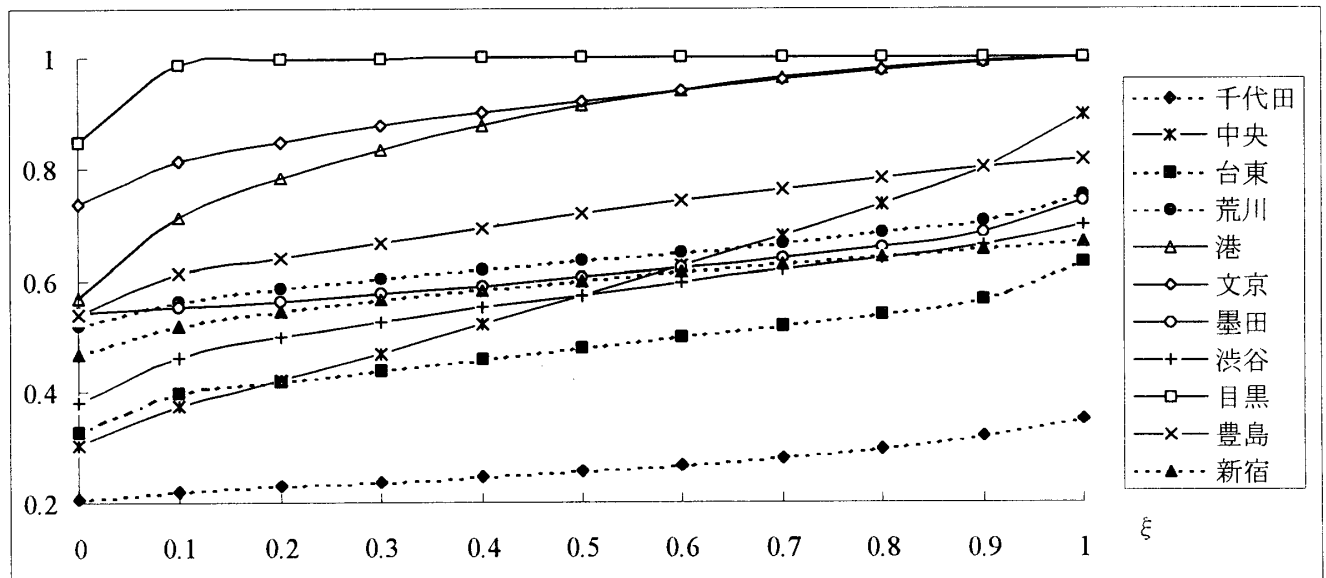


図1: ξ を変化させたときの評価値($\theta_{\xi,a}^*$)の変化