1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

最短時間経路問題の周辺

1002750　埼玉大学　大山達雄　OYAMA Tatsuo

1. 光の屈折：Fermatの定理

光が異なる層を通過する場合、入射角α、反射角βは次の関係を満たす。

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}=n \qquad n:\text{屈折率} \tag{1}$$

2. 最短時間経路：直線境界ケース

層Iを通過するときは速度u、層IIを通過するときは速度vとなる物体の最短時間経路すなわち点Aから点Bに至るのに要する時間$T=\frac{\mathrm{AP}}{u}+\frac{\mathrm{PB}}{v}$を最小にする最短時間経路A → P → Bは以下の関係を満たす。

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{u}{v} \tag{2}$$

点A, B, Pの座標をそれぞれA$(0,a)$, B(b,c), P$(x,0)$とする。線分AP, BPの長さはAP $=\sqrt{x^2+a^2}=r_1$，BP $=\sqrt{(x-b)^2+c^2}=r_2$となる。点Aから点Bに至るのに要する時間は

$$T=\frac{\mathrm{AP}}{u}+\frac{\mathrm{PB}}{v}=\frac{r_1}{u}+\frac{r_2}{v} \tag{3}$$

と書くことができる。したがって

$$\frac{dT}{dx}=\frac{x}{ur_1}+\frac{b-x}{vr_2}=\frac{\sin\alpha}{u}-\frac{\sin\beta}{v}=0 \tag{4}$$

が満たされるとき、すなわち(2)が成立するとき、点Aから点Bに至るのに要する所要時間は最小となる。

3. 最短時間経路：円周境界ケース

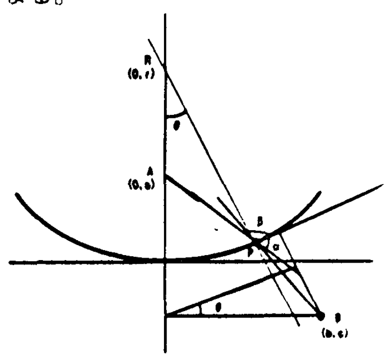
点A, B, R, Pの座標を$(0,a)$, (b,c), $(0,r)$, (x,y)おくと、線分AP, PBの長さはAP $=\sqrt{x^2+(y-a)^2}=r_1$, PB $=\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}=r_2$となる。点Aから点Bに至るのに要する時間は式(3)のように与えられる。ここで点Pの座標を$x=r\cos\theta, y=r-r\cos\theta$とおくと

$$\begin{aligned}\frac{dr_1}{d\theta}&=\frac{x}{r_1}\frac{dx}{d\theta}+\frac{y-a}{r_1}\frac{dy}{d\theta}\\&=\frac{r(r-a)\sin\theta}{r_1}\\\frac{dr_2}{d\theta}&=\frac{x-b}{r_2}\frac{dx}{d\theta}+\frac{y-c}{r_2}\frac{dy}{d\theta}\\&=\frac{-r\cos\theta+r(r-c)\sin\theta}{r_2}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\frac{dT}{d\theta}&=\frac{r-a}{ur_1}+\frac{-b\cos\theta+(r-c)\sin\theta}{vr_2}\\&=\frac{\cos\alpha}{u}+\frac{\cos\beta}{v}=0\end{aligned} \tag{5}$$

のとき、点Aから点Bに至るのに要する所要時間は最小となる。



4. 一つの一般化

定理　点A, Bが曲線Cの両側にあるとする。点Aの側にあるときは速度u、Bの側にあると

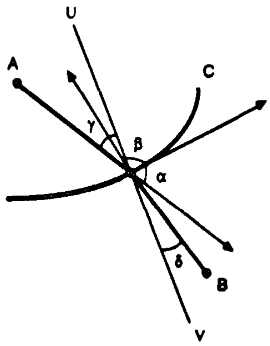
きは速度vで動くとする。点Aから点Bに至るのに要する所要時間が極小となるとき、以下の関係を満たす。

$$\frac{\cos\alpha}{u}+\frac{\cos\beta}{v}=0 \tag{6}$$

一般の場合は$\vec{t}=(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt})$に対して必要条件

$$\frac{dT}{dt}=|\vec{t}|(\frac{\cos\alpha}{u}+\frac{\cos\beta}{v})=0$$

が得られる。



曲線Cが直線のとき、すなわち曲線Cが接線ベクトルと一致するとき、上図において$\alpha=\frac{\pi}{2}-\gamma,\beta=\frac{\pi}{2}+\delta$が成立する。したがって上の関係に代入すると

$$\frac{\cos\alpha}{u}+\frac{\cos\beta}{v}=\frac{\sin\gamma}{u}-\frac{\sin\delta}{v}=0$$

よりFermatの屈折の法則が得られる。

5. もう一つの一般化

点A, Bと定数m,n,kに対して

$$m\mathrm{AP}+n\mathrm{PB}=k \tag{7}$$

を満たすような点Pの軌跡として得られる曲線はデカルトの曲線と呼ばれる。デカルトの曲線において点Pにおける接線がAP, PBとなす角をそれぞれα,βとおくと、上の定理から次の関係が成立する。

$$m\cos\alpha+n\cos\beta=k \tag{8}$$

一般にはデカルトの曲線は4次曲線となる。特殊ケースとして以下のような2次曲線が得られる。AP=r_1, PB=r_2とおく。

(i). $m=n$ のとき

$r_1+r_2=\frac{k}{m}$ (一定) より楕円となる。(AB< $\frac{k}{m}$) また$\cos\alpha+\cos\beta=0$より$\alpha+\beta=\pi$となり、楕円上の点Pでの接線がAP, PBと等しい角をなす。

(ii). $m=-n$ のとき

$r_1-r_2=\frac{k}{m}$ (一定) より双曲線となる。(AB> $\frac{k}{m}$) また$\cos\alpha-\cos\beta=0$より$\alpha=\beta$となり、双曲線上の点Pでの接線がAP, PBと等しい角をなす。

(iii). $m=m_2,n=-m_1,k=0$ のとき

点Pの軌跡は点A, Bからの距離の比が$m_1:m_2$となる点の軌跡である。したがってこの場合、アポロニウスの円となる。

6. 最短時間経路の特殊形

図中の点A, B, M, Nの極座標をそれぞれ$(r_1,\theta_1),(r_2,\theta_2),(r\cos\alpha,r\sin\alpha),(r\cos(\theta+\alpha),r\sin(\theta+\alpha))$とおくとき、点Aから点Bに至るのに要する時間$T$は

$$\frac{dT}{d\theta}=\frac{r-a}{ur_1}+\frac{-b\cos\theta+(r-c)\sin\theta}{vr_2}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{u}+\frac{\cos\beta}{v}=0$$

が満たされるとき、点Aから点Bに至るのに要する所要時間は最小となる。

層・点	2	3以上
1	線分	Steiner 木問題
2	Fermat 定理	?
3以上	?	?