

## 都市施設の数を決めるための数理モデル

01107680

慶應義塾大学

栗田 治 KURITA Osamu

## 1. はじめに

都市内に複数の公共的な施設を設けるとき、その数はどの程度にすれば良いのだろうか？施設が少ないほど、建設・運営費は低廉ですむ。この観点からすると、施設数は小さい程よい。しかし、住民は分散して住んでいるから、距離を克服せねば施設を訪れることが出来ない。移動費用の観点からすると、施設は遍く存在していることが望ましいのである。

大切なのは、公共的な施設の場合“施設建設・運営費も交通費も、ともに住民が負担する”という事実である(前者は税負担、後者は移動費用負担)。施設を増やすほど便利になるが、同時に建設・運営費も増加する。既存の施設計画論(例えば[1])はこれに着目していない。本研究では、このトレード・オフに基づいて適正な施設数を決めるためのモデルを提案する。

## 2. 定式化

対象都市の面積を $S$ とし、人口を $P$ とする。そして

- 都市内で住民が一様に分布する

と想定する。この都市に同一種の施設を $n$ 個設け、その誘致圏を“区”と呼ぶ。現実の施設とその誘致圏(区役所と区など)を見ると、1つ1つの区の大きさや人口に大きな差異がない場合も多いので

- 区の人口(施設利用者数)は一律に $P/n$ とする
- 区の面積も一律に $S/n$ とする

の両者が成り立つものとして議論を進める。

## 2.1 施設建設・運営費

ここでは施設の建設・運営費として以下のものを考慮する。ただし、どちらも“1つの施設の費用を年当たり換算したもの”である：

1. 施設建設費(用地取得費を含む)  $p_1$  [円]
2. 施設運営費(人件費などを含む)  $p_2$  [円]

まず、 $p_1$ は正の定数 $c$ で与える。勿論、厳密に言えば、この費用は施設を利用する住民の数に依存する。しかし、ここで登場する他の費用に比べれば、その依存の程度は大きくないものと想定した：

$$p_1 = c \text{ (正の定数)}. \quad (1)$$

$p_2$ に関しては、3通りの費用函数を取り上げる：

$$p_2(\text{定数}) = a, \quad (2)$$

$$p_2(\text{線形}) = a + b(P/n), \quad (3)$$

$$p_2(\text{規模}) = a + b\sqrt{P/n}. \quad (4)$$

(2)は運営費を定数で与え、(3)は運営費を施設利用者数の線形函数で与えている。一方(4)は運営費に施設利用者数の規模の効果がある例である。これら3つの式で、 $a$ と $b$ は正の定数であり、 $a$ はいわゆる固定費を意味している。こうした典型的な函数形で一般論を展開しておくことには意味があるものと思われる。

## 2.2 住民の交通費

議論を明解にするために、各区の形状を施設数 $n$ によらず相似と見做す。区のスケールは $\sqrt{S/n}$ だから、住民から施設への平均距離を $\bar{r}(n)$ [km]とおくと

$$\bar{r}(n) = \kappa\sqrt{S/n} \quad (5)$$

と表せる。定数 $\kappa$ は、区の形状と施設位置に依存する。ちなみに区を正六角形と見做し、施設をその重心に置けば $\kappa = (4 + 3\ln 3)/(6\sqrt{6}\sqrt{3}) \simeq 0.3772$ である[2]。

次に以下を定義する：

$$\alpha = \text{(単位移動費)}[\text{円}/\text{km}], \quad (6)$$

$$\nu = \text{(住民1人の年平均到来回数)}[\text{回}]. \quad (7)$$

このとき区当たりの交通費総額 $q$ は次式の通り：

$$q = \bar{r}(n) \times \alpha \times \nu \times \frac{P}{n} = \nu\kappa\alpha P\sqrt{S} \times \frac{1}{n\sqrt{n}}. \quad (8)$$

## 3. 総費用の最小化問題

## 3.1 施設運営費が定数の場合

この場合は、既に定式化した $p_1$ 、 $p_2(\text{定数})$ ならびに $q$ を合算すると区毎の費用となる。これを $n$ 倍すると都市住民の総費用負担 $T_{\text{定数}}(n)$ が与えられる：

$$\begin{aligned} T_{\text{定数}}(n) &= n(p_1 + p_2(\text{定数}) + q) \\ &= (c + a)n + \nu\kappa\alpha P\sqrt{S} \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (9)$$

ここで最適化問題

$$\text{(問題1) minimize } T_{\text{定数}}(n)$$

の解を $n = n_{\text{定数}}$ としよう。 $T_{\text{定数}}(n)$ は単峰な函数のため、1階の条件

$$T'_{\text{定数}}(n) = c + a - \frac{\nu\kappa\alpha P\sqrt{S}}{2} n^{-3/2} = 0 \quad (10)$$

を満たす $n$ が大域的な最適解となる。これを具体的に求めると次の通りである：

$$n_{\text{定数}} = \left\{ \frac{\nu\kappa\alpha}{2(c+a)} \right\}^{2/3} P^{2/3} S^{1/3}. \quad (11)$$

### 3.2 施設運営費が利用者数の線形関数の場合

この場合の総費用  $T_{線形}(n)$  を具体的に求めると、前出の  $T_{定数}(n)$  に  $bP$  を加えた形に帰着する：

$$\begin{aligned} T_{線形}(n) &= n(p_1 + p_2(\text{線形}) + q) \\ &= bP + T_{定数}(n). \end{aligned} \quad (12)$$

したがって、最適化問題

$$\text{(問題2) minimize } T_{線形}(n)$$

の解  $n_{線形}$  は (11) に一致する。

### 3.3 施設運営費に利用者数の規模の効果がある場合

この場合は、 $p_1$ 、 $p_2(\text{規模})$  ならびに  $q$  を合算して  $n$  を乗ずることにより、総費用  $T_{規模}(n)$  が得られる：

$$\begin{aligned} T_{規模}(n) &= n(p_1 + p_2(\text{規模}) + q) \\ &= (c + a)n + b\sqrt{P}n^{1/2} + \nu\kappa\alpha P\sqrt{S}n^{-1/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

これもまた単峰関数である。最適化問題

$$\text{(問題3) minimize } T_{規模}(n)$$

の1階の条件を適宜変形すると3次方程式に帰着するので、解析的に解が得られる(詳細は割愛)。

## 4. 考察と現実例

3.1節、3.2節によって次が成立することが示された。

[性質] 施設運営費が定数または施設利用者数の線形関数のとき、最適施設数は人口の2/3乗と都市面積の1/3乗とに比例する：

$$n_{定数}(=n_{線形}) \propto P^{2/3} S^{1/3}. \quad (14)$$

この結果に基づいて政令指定都市の区の数进行分析してみよう。表1の1列から4列に、1990年(平成2年)における政令指定都市の都市名・人口  $P$ ・面積  $S$ ・区数  $n$  のデータを示す。各政令指定都市に関して、指標

$$\xi = P^{2/3} S^{1/3} \quad (15)$$

を算出し表1の5列目に示した。この指標  $\xi$  と実際の区の数と比較するために、比を

$$\zeta = n/\xi \quad (16)$$

として算出した(表1の最終列)。この比  $\zeta$  を見ると  $n$  と  $\xi$  との間にかかなり安定した関係があることが分かる(ただし、大阪市だけは飛びぬけて大きな値を取っている)。大阪市を除けば、 $5.74 \times 10^{-5}$  (仙台市) から  $13.93 \times 10^{-5}$  の範囲に収まっている。政令指定都市の区数は、存外適切に設定されているのではあるまいか。

$\xi$  値と区数  $n$  の関係を図1に示す。これを見ると、大阪市は現実の区数が過大で、東京23区は区数が過少である。また、 $\xi$  値と区数  $n$  の間に線形の関係が存在している(図中に大阪を除いた回帰直線を示す)。この線形関係からの乖離をもって施設の多寡を議論する礎とすべし。これが筆者の主張である。

例えば東京23区と仙台の区数を比較してみよう。東京の区平均人口は354,938人、仙台のそれは183,680人だから、東京の区の数には少な過ぎるように見える。

表1 政令指定都市のデータ(1990年)

都市名	人口 $P$ [人]	面積 $S$ [km <sup>2</sup> ]	区数 $n$	$\xi$	$\zeta = n/\xi$ ( $\times 10^{-5}$ )
札幌	1,671,742	1121	9	146,332	6.15
仙台	918,398	784	5	87,103	5.74
東京	8,163,573	618	23	345,277	6.66
横浜	3,220,331	435	16	165,265	9.68
川崎	1,173,603	142	7	58,058	12.05
名古屋	2,154,793	326	16	114,861	13.93
京都	1,461,103	610	11	109,215	10.07
大阪	2,623,801	220	28	114,905	24.37
神戸	1,477,410	544	11	105,888	10.39
広島	1,085,705	740	8	95,555	8.37
北九州	1,026,455	482	9	79,795	11.28
福岡	1,237,062	336	7	80,146	8.73

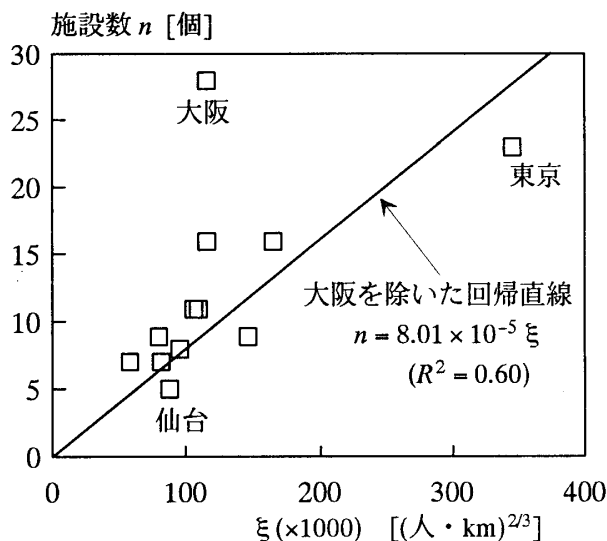


図1  $\xi$  値と区数  $n$  の関係。

しかし、両者の区平均面積を比べると、東京が27km<sup>2</sup>で仙台は157km<sup>2</sup>だから、東京の方が遥かにコンパクトである。移動費から見ると仙台の区数は少な過ぎる。2つの正反対の主張のどちらが正しいのだろうか？

本研究の  $\zeta$  値を見ると、東京23区で  $\zeta = 6.66 \times 10^{-5}$ 、仙台で  $\zeta = 5.74 \times 10^{-5}$  と、ほぼ同等の数値である。定義から明らかのように  $\zeta$  が大きいほど実際の区の数が多いのである。したがって(仙台と比較する限り)東京の区数は少な過ぎるとは言えない。さらに前出の単位移動費  $\alpha$  は、地下鉄網の充実によって、東京の方が小さい可能性が高い。最適施設数は(実は)  $\alpha$  の増加関数である。こうした点も考慮すると、仙台市にこそもっと区役所があってよい、と主張すべきであろう。

以上は巨視的な概算による検討であって、他の諸々の要因を捨象している。しかし、大胆な単純化の見返りとして、(物理学の次元解析の帰結に似た)明解な結論が得られた。これは都市工学、わけても施設計画論の分野での1つの定石足り得るものと考えられる。

## 5. 参考文献

- [1] 柳澤 忠・谷村秀彦他(1984)：地域施設計画(新建築学大系21)、彰国社。
- [2] 栗田 治(1995)：不定形に関する距離分布の基礎、慶應義塾大学理工学部管理工学科 Technical Report, No.95008。