1996年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
秋季研究発表会

シンプレックスな制約のもとでの凹２次関数の最小化問題

02003840 法政大学 *男全 勝行*OMATA Katsuyuki
01900070 法政大学 若山 邦紘 WAKAYAMA Kunihiro

1 はじめに

本研究では、以下のように定式化される線形制約のもとでの凹２次関数の最小化問題を取り上げる。

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad f(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \\ \text{sub.to} \quad g_i(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, m \end{aligned}$$

ただし、$\boldsymbol{D}$は正定符号、制約式に変数の非負条件が含まれており、許容領域が有界閉集合であることを仮定する。

この問題の特徴は、一般に許容領域の端点に局所的最適解が複数個存在することである。したがって、すべての端点のうちのどれかが大域的最適解となる。しかし、そのための必要十分条件が存在しないため、効果的な解法がないといってよい。

そこで本研究では、制約条件がシンプレックスであるという特殊な問題に対して内点罰金関数法を用い、その有効性について調べた。

2 拡張目的関数と内点法

目的関数と制約条件式から、新たに以下のような拡張目的関数を定義し、それに対して許容領域の内点から降下法を用いることにする。

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad F(\boldsymbol{x}, k) &= f(\boldsymbol{x}) + k\sum_{i=1}^{m} \frac{||\nabla g_i(\boldsymbol{x})||}{g_i(\boldsymbol{x})} \\ k &: \text{罰金係数} (> 0) \end{aligned}$$

$F(\boldsymbol{x}, k)$ は、$g_i(\boldsymbol{x}) = 0$ に近づくにしたがい大きな値となり、制約付近で $F(\boldsymbol{x}, k) \to \infty$ である。罰金項の分子は制約の効き方を基準化するものである。

*法政大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程

3 問題例

3.1 制約条件がシンプレックスである問題

以下のような制約がシンプレックスである問題に対して、内点罰金関数法を用いる。この問題では、$z = 1 - x - y$であるので２変数の問題に変形することができる。

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad f(x, y, z) &= -2x^2 - 3y^2 - z^2 + 3xy \\ &\quad +2xz + 2yz + 2x + 2y + z \\ \text{sub.to} \quad g_1(x, y, z) &= x \\ g_2(x, y, z) &= y \\ g_3(x, y, z) &= z \quad (z = 1 - x - y \text{である}) \end{aligned}$$

拡張目的関数は、以下の通りである。

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad F(x, y, z, k) &= f(x, y, z) + k\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \\ k &: \text{罰金係数} (> 0) \end{aligned}$$

目的関数の形状を、図1に示す。まず、$F(\boldsymbol{x}, k)$ のkを操作することにより、$F(\boldsymbol{x}, k)$ が凸関数となるkを求める。そして、その凸関数の最小点を求める。本来ならば、内点法の初期点は任意の内点で良いが、この点を次の内点罰金関数法の降下法の初期解とする (図3)。

次に、罰金係数kを$k \approx 0$とした場合の拡張目的関数の最小点を求める (図2)。前段階で得られた初期解から降下法を用いて最小化を行なえば、ある端点の近傍の点に収束する。この端点は、比較的良い局所的最適解であることが期待できる。特にこの問題のように制約がシンプレックスである時は、その点はもとの問題の大域的最適解である。

3.2 罰金係数 k について

大きな k であれば、$F(\boldsymbol{x},k)$ は凸関数である。$F(\boldsymbol{x},k)$ が凸関数であるためには、許容領域内の全ての点において、そのヘッセ行列 $\nabla^2 F(\boldsymbol{x},k)$ が正定値である必要がある。

$$\nabla^2 F(\boldsymbol{x},k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x},k)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x},k)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x},k)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x},k)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

しかし k が大き過ぎると、$F(\boldsymbol{x},k)$ の最小点は制約領域の中心へと移動してしまう。つまり大域的最適解から遠ざかり、降下法の初期点としてふさわしくない (図4)。この例題において、許容領域の中心で $\nabla^2 F(\boldsymbol{x},k)$ が正定値であるためには、$k > 0.111$ である。

4 おわりに

本研究では、線形制約のもとでの凹 2 次関数の最小化問題に対して、内点罰金関数法を用いた。この問題を解く上で、制約がシンプレックスであるような特別な時には、適切な k を用いれば内点罰金関数法により大域的最適解を求めることができることがわかった。しかし、一般の問題では、そのような解が大域的最適解となるとは限らない。そのため、切除平面法による許容領域の削除など他のアルゴリズムとの併用が必要となるだろう。

今後、さらに問題の特殊性を考慮することなく大域的な解を求めることのできるアルゴリズムを開発し、検討していくことが必要である。

参考文献

[1] K.Wakayama, "A Good Initial Solution for a Concave Minimization Programming", *Proceedings of ISORA'95*(1995)

[2] 今野 浩, 山下 浩, "非線形計画法", 日科技連出版 (1978)

[3] 男全, 三竹, 若山, "線形制約のもとでの凹 2 次関数の最小化問題", 日本 OR 学会 1996 年度春季研究発表会アブストラクト集 (1996)194-195.

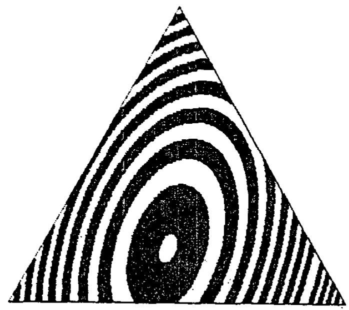

図 1: $f(x)$

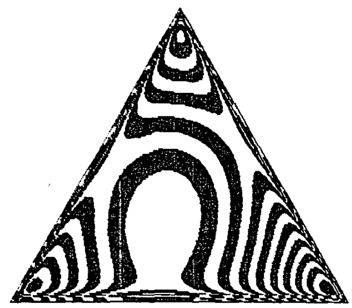

図 2: $F(x,k), k = 0.01$

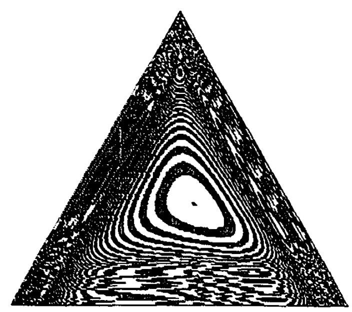

図 3: $F(x,k), k = 0.26$

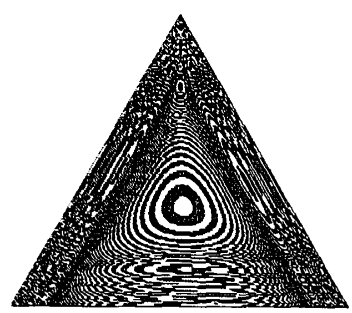

図 4: $F(x,k), k = 0.70$