

多目的線形生産計画ゲーム

01403974 撰南大学 *西崎一郎 NISHIZAKI Ichiro
01202665 広島大学 坂和正敏 SAKAWA Masatoshi

1. はじめに

本論文では Owen [4] が分析した複数の意思決定者のいる線形生産計画問題を多目的環境のもとで考察する。たとえば、線形生産計画問題において、各製品を製造するときにある量の汚染物が副産物として排出されるとすると、利益の最大化という目的のみならず汚染物の排出量の最小化をも同時に考慮した問題を考察することが要請され、多目的線形計画問題として定式化される。本論文では、多目的問題として生産計画問題を定式化し、その多目的生産計画問題から複数財ゲームが生成される。この特徴から複数財ゲームのコアの非空性が示される。さらに多目的生産計画問題を主問題としたときの双対問題の最適解からコアに属する利得が計算できることを示し、数値例によって例証する。この数値例においては Zeleny [6] のアルゴリズムを用いて、すべてのパレート最適点を計算し、多目的線形計画法における双対性の理論 [2] からそれぞれのパレート最適点に対応する双対パレート最適点を計算する。さらに、最小コアあるいは仁の概念に基づいた解も計算する。

2. 問題の定式化

プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$ とし、各プレイヤーはそれぞれが所有する資源を共同で使用するにより、 m 種類の製品を製造するとする。プレイヤー i の初期所有資源を $b^i = (b_1^i, b_2^i, \dots, b_m^i)$ とする。任意の提携 $S \subset N$ の所有する資源 k の総量は $b_k(S) = \sum_{i \in S} b_k^i$ である。製品 j を製造するには資源 $k = 1, 2, \dots, p$ をそれぞれ a_{kj} 単位必要とする。 m 種類の製品を製造する場合、 ℓ 種類の目的を考慮した多目的最適化問題として定式化する。この製造計画モデルが線形であるとすると、一般に目的の添字集合を $K = \{1, 2, \dots, \ell\}$ とし、提携 S の下での ℓ 目的線形生産計画問題は次のように表現される。

$$\left. \begin{array}{l} \max \quad z(x) = Cx \\ \text{s. t.} \quad x \in T_S \triangleq \{x \mid Ax \leq b(S), x \in \mathbf{R}_+^p\} \end{array} \right\} \quad (1)$$

ここで、 C は ij 要素を c_{ij} とする $\ell \times p$ 行列で、 A は ij 要素を a_{ij} とする $m \times p$ 行列で、 $b(S)$ は i 要素を $b_i(S)$ とする m 次元列ベクトルである。 $\hat{T}_S = \{z \in \mathbf{R}^\ell \mid z = Cx, x \in T_S\}$ とすると、問題 (1) のパレート最適解の集合は $\text{Max } \hat{T}_S = \{a \in \hat{T}_S \mid (\hat{T}_S - a) \cap \mathbf{R}_+^\ell = \{0\}\}$ で表現され、このとき

$$V(S) = (\text{Max } \hat{T}_S - \mathbf{R}_+^\ell) \cap \mathbf{R}_+^\ell \quad (2)$$

とおくと、多目的線形生産計画問題 (1) から複数財ゲーム (N, V) が生成される [1], [3]。この複数財ゲームを多目的線形生産計画ゲームとよぶ。多目的線形生産計画問題 (1) の実行可能領域が非空の有界集合であるならば、それは有界な凸多面体となり、 $V(S)$ は \mathbf{R}^ℓ の包括的かつコンパクトな部分集合となる。ここで、集合 A が包括的であるとは $b \in A$ かつ $0 \leq a \leq b$ ならば、 $a \in A$ となることである。

3. 多目的線形生産計画ゲームのコア

通常の特性関数型の協力ゲーム (N, v) ではコアは配分間の支配関係から定義され、さらにゲームが優加法的であるときある配分 (imputation) がコアに属することの必要十分条件はその配分が提携合理的であることであった。複数財ゲーム (N, V) においても同様のことが考察でき、Nouweland, Aarts and Borm [3] は支配関係から定義された解集合を支配コア (dominance-core) とし、提携合理性から定義された解集合を安定解 (stable outcome) としている。

$S \subset N$ に対して, $x_i \geq y_i, x_i \neq y_i, \forall i \in S, \sum_{i \in S} x_i \in V(S)$ ならば, x は y を S を通じて支配するといひ, $x \text{ dom}_S y$ で表わす. また, $x \text{ dom}_S y$ となる S が少なくとも1つ存在するとき単に x は y を支配するといひ, $x \text{ dom } y$ で表わす. 支配コア $DC(N, V)$ はどの提携からも支配されない配分の集合として次のようにされる.

$$DC(N, V) = \{x \in I(N, V) \mid \text{there is no } S \text{ and no } y \in I(N, v) \text{ such that } y \text{ dom}_S x\} \quad (3)$$

ここで $I(N, V) = \{x \in (\mathbf{R}_+^\ell)^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \in \text{Max } V(N), x_i \notin V(\{i\}) \setminus \text{Max } V(\{i\}), \forall i \in N\}$ である. 安定解は任意の提携 S に対して S に属するプレイヤーのみで獲得できる利得より大きい利得ベクトルの集合 (どの提携もその提携以外のプレイヤーの協力なしでは利得を改善できない) として次のように定義される.

$$SO(N, V) = \left\{ x \in (\mathbf{R}_+^\ell)^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \in \text{Max } V(N), \sum_{i \in S} x_i \notin V(S) \setminus \text{Max } V(S), \forall S \subset N \right\} \quad (4)$$

複数財ゲーム (N, V) において $S \cap T = \emptyset$ となる任意の $S, T \subset N$ に対して $V(S) + V(T) \subset V(S \cup T)$ を満たすとき, (N, V) は優加法的であるという. 優加法的である複数財ゲーム (N, V) では $DC(N, V) = SO(N, V)$ であることが知られている [5].

定理 1 (1), (2) によって定義された多目的線形生産計画ゲーム (N, V) は優加法的である.

定理 1 によって多目的線形生産計画ゲーム (N, V) では, $DC(N, V) = SO(N, V)$ であることがわかるので, これらの解をコアと呼び $C(N, V)$ で表す.

次に, 複数財ゲーム (N, V) において, 平衡性の概念を定義する. $\lambda : 2^N \rightarrow \mathbf{R}_+$ が $\sum_{S \subset N} \lambda(S) = 1, \forall j \in N$ を満たし, $\sum_{S \subset N} \lambda(S) V(S) \subset V(N)$ ならば, 複数財ゲーム (N, V) は平衡であるという. 平衡な複数財ゲーム (N, V) は少なくとも1つの安定解をもつことが知られている [3].

定理 2 (1), (2) によって定義された多目的線形生産計画ゲーム (N, V) は平衡である.

定理 2 より多目的線形生産計画ゲーム (N, V) は非空のコア $C(N, V)$ をもつことがわかった. コア $C(N, V)$ に属する点を見つけることが重要であり, そのために多目的線形計画問題の双対問題を考える. 多目的線形生産計画問題 (1) の双対問題は次のように表現される.

$$\left. \begin{array}{l} \min w(Y) = Yb(S) \\ \text{s. t. } Y \in T_d \triangleq \{Y \mid YAu \leq Cu \text{ for no } u \in \mathbf{R}_+^p\} \end{array} \right\} \quad (5)$$

定理 3 Y^* を $S = N$ に対する多目的線形生産計画問題 (1) の双対問題 (5) のパレート最適解とする. このとき,

$$u_{ik} = b_1^i y_{k1}^* + b_2^i y_{k2}^* + \cdots + b_m^i y_{km}^*, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, \ell \quad (6)$$

で定義される利得 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^{\ell \times n}$, $u_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{i\ell})$ は安定解 $SO(N, V)$ に属する.

参考文献

- [1] J.J.M. Derks and S.H. Tijs. Totally balanced multi-commodity games and flow games. *Methods of Operations Research*, 54:335–347, 1986.
- [2] H. Isermann. On some relations between a dual pair of multiple objective linear programs. *Zeitschrift für Operations Research*, 22:33–41, 1978.
- [3] A. van den Nouweland, H. Aarts, and P. Borm. Multi-commodity games. *Methods of Operations Research*, 63:329–338, 1990.
- [4] G. Owen. On the core of linear production games. *Mathematical Programming*, 9:358–370, 1975.
- [5] T. Tanino, Y. Muranaka and M. Tanaka. On multiple criteria characteristic mapping games. *Proceedings of MCDM '92*, Taipei, 63–72, 1992.
- [6] M. Zeleny. *Linear Multiobjective Programming*. Springer-Verlag, 1974.