

作業時間は Wald 分布にしたがう

米田 清, 平山 雅之, 早川 ルミ
(株) 東芝, 研究開発センター

1 はじめに

この報告は project の終了期限を各作業にかけられる時間に配分するという観点から作業時間の分布を考え、作業時間の分布 model として Wald 分布が有力なことを主張する。直観的な理由と、実測にあてはまりが良いことを示し、時間配分の方法について今後の課題を述べる。

2 作業時間の model

作業時間の分布は、伝統的には beta 分布が使われている。その理由は、beta 分布は確率が正の値を取る範囲が有限の区間として与えられることにある。「作業時間には、いくら延びてもここまで、という限界がある」という考え方である。これは成り立つ保証がないし、直観に訴える根拠も薄い。加えて、慣用的に用いられている平均と分散の推定量が、特殊な状況でしか妥当性を持たない [3]。

作業時間の分布モデルには、以下の性質が望ましい。まず、作業開始時点以前には終了しない、つまり左半直線で確率が 0。次に、合成と分解の都合上、再生性と無限分解可能性。

おもいつくのは Gamma 分布と Wald 分布である。Simulation で良く使う一般化 lambda 分布は、表現力が高い代わりに母数が多くて扱いにくい。たとえば、主観確率として指定する場合に入力の手間がたいへんである。

Gamma 分布は、待ち行列で標準的に用いられる Erlang 分布を含む。注目する作業をいくつかの部分作業に等分し、それぞれの部分作業にかかる時間が互いに独立な指数分布に従うとする。すると作業全体にかかる時間は、部分作業の数が phase 数である Erlang 分布に従う。指数分布をとる理由は、たとえば最大 entropy 原理に求める。

Wald 分布は逆 Gauss 分布ともよばれ [1, 5]、正規分布と似た良い性質を持っていて、扱いやすい。また、Gamma 分布の母数の最尤推定は非

線型の連立方程式を数値的に解かねばならないのに対して、Wald 分布の場合は算術式の計算ですむ。

作業時間が Wald 分布に従うと想定する直観的な根拠を述べる。当該作業の進捗を表現する数量的な指標があるとする。その指標がある閾値を初めて越した時点で作業が終了する。指標の値が、上昇方向の流れ (drift) の上で Brown 運動をするならば、作業が終了する時点の分布は Wald 分布に従う。これは「作業を終るよう、常に一定の努力を払う。すると予見できなかった要因が random に働いて目標の達成を阻害ないし促進する。」という考えである。

3 実験

作業時間の分布 model として Gamma 分布よりも Wald 分布のほうが自然なことを確かめたい。

ある技術展示会の予行で、各展示の担当者は 3 分間の説明を行う。その 3 分間で行うべき作業が実際にはどれだけの時間をかけて行われるかを、'94,'95 年の展示会について測定した。測定の精度は ±5 秒以内で、10 秒単位で記録した。

94-10-19 測定 :

26	25	15	33	38	21	24	19	18	18
20	18	17	29	19	42	20	25	17	23
27	18	23	33	39	27	19	12	20	20
24	22								

95-10-04 測定 :

21	26	20	22	17	15	20	18	25	25
24	30	31	34	25	18	25	22	15	20
25	21	19	18	21	24	22	31	20	21
29	23	22	22	18	18	45	27	24	19
20	28	23	20	24	20	48	16	16	23

先ず、Wald 分布

$$\left(\frac{1}{2\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\lambda}{x} \left(\frac{x-\mu}{\mu}\right)^2\right\}$$

の母数 μ, λ を最尤法で推定する。次に、Gamma 分布を想定した場合の母数 b, c を最尤法で推定す

る. Gamma 分布の密度関数は

$$\left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \frac{e^{-\frac{x}{b}}}{b\Gamma(c)}.$$

両分布についての最尤法は, たとえば [2] を参照. 各種統計値を示す.

	Wald	Gamma
'94	$n = 32$	
	$\hat{\mu} = 23.5$	$\hat{b} = 1.87$
	$\hat{\lambda} = 288$	$\hat{c} = 12.5$
AIC	212.6	214.2
'95	$n = 50$	
	$\hat{\mu} = 23.2$	$\hat{b} = 1.40$
	$\hat{\lambda} = 397$	$\hat{c} = 16.5$
AIC	313.7	318.0

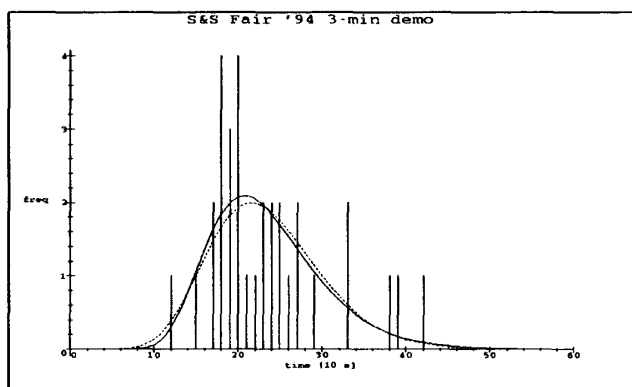


図 1: '94 data

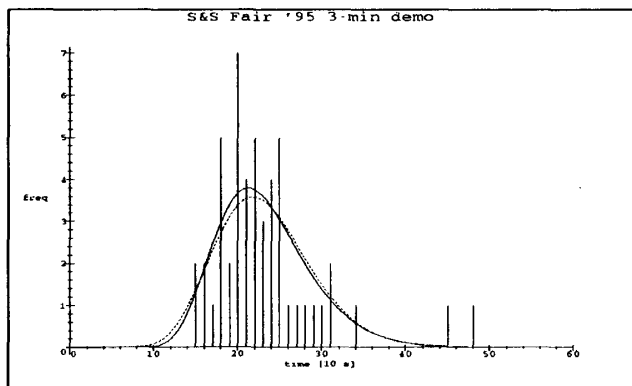


図 2: '95 data

棒: 実測. 実線: Wald. 破線: Gamma.

図 1, 2 にあてはめの結果を示す. 最小 AIC 推定は Wald 分布である. Wald と Gamma の AIC の差, すなわち対数尤度比は, 1.6 と 4.3 である. 自由度 2 の χ^2 分布関数を $F()$ とすると $F(1.6) = .55$, $F(4.3) = .88$ なので, Wald の方がかなり良い.

4 おわりに

Project 計画に現れる作業は目標と, それを達成するための資源と時間で特徴づけられる. PERT 図を描くことは大きな作業を小さな作業に分解することであって, 目標, 資源, 時間の分解を伴う.

しかるに従来の確率的 PERT (たとえば [4] と所載の文献) では逆に, 作業という最小単位を積上げて project を構成するという bottom up の認識に立っている. そのため興味のある中心は個々の作業時間の分布から project 終了までの時間分布を導くことと, 各経路の bottleneck 確率の計算であった. 実際の project 計画では終了期限は所与の制約なので, それを個々の作業にどう割振るかの指針が欲しい.

今後, Wald 分布を具体的な model として時間配分の方法を検討したい.

参考文献

- [1] R. S. Chiikara and J. L. Folks. *The Inverse Gaussian distribution: theory, methodology, and applications*. Marcel Dekker, 1989.
- [2] M. Evans et al. *Statistical distributions, 2ed*. John Wiley and Sons, 1993.
- [3] D. L. Keefer and W. A. Verdini. Better estimation of PERT activity time parameters. *Management Science*, 39(9), 1993.
- [4] A. Nádas. Probabilistic PERT. *IBM Journal of Research and Development*, (3):339-347, May 1979.
- [5] V. Seshadri. *The Inverse Gaussian distribution: a case study in exponential families*. Oxford Science Publications, 1993.