

AHP一対比較の過大評価と過小評価の判定と一対比較の推定

01404360 日本大学 西澤一友 NISHIZAWA Kazutomo

1 はじめに

AHP(Analytic Hierarchy Process)の一対比較の整合性は、通常、CI(Consistency Index)により判定されている。しかし、CIの値だけでは一対比較の矛盾に対する情報は得られない。そこで、一対比較を有向グラフとして表現すると、その中のサイクルを見つけることにより矛盾を指摘できる[1]場合がある。しかし、この場合の指摘は一対比較の優劣が逆転しているときに限る。したがって、一対比較の過大評価または過小評価により、整合性を悪くしている場合の指摘はできない。本報告では一対比較の過大評価または過小評価の判定方法を提案する。

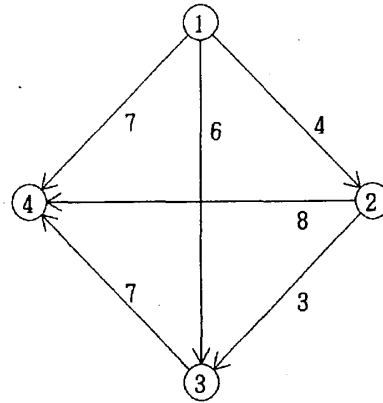


図 1: 例の有向グラフ

2 過大評価または過小評価の例

例として、次の式 (1) に示す4つの代替案 (①~④) に対する一対比較行列A[2]について考える。

$$A = \begin{bmatrix} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \\ \textcircled{1} & 1 & 4 & 6 & 7 \\ \textcircled{2} & 1/4 & 1 & 3 & 8 \\ \textcircled{3} & 1/6 & 1/3 & 1 & 7 \\ \textcircled{4} & 1/7 & 1/8 & 1/7 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

この例では、各代替案の順序関係は一意に決定できる。また、式 (1) に対応する有向グラフ (図1) にもサイクルはない。したがって、一見、整合性は良いように思われる。しかし、CI=0.15であり、整合性が良くないことがわかる。その原因として次のことが考えられる。たとえば、有向グラフの中で、①と③、①と④の一対比較が正しければ、③と④の一対比較の結果はほぼ同等と考えられ、評価値としては2または3が妥当であり、7は過大評価であると思われる。

3 過大評価または過小評価の判定方法

一対比較の過大評価または過小評価を判定するアイデアは3つの代替案について評価値の関係から判定するものである。 $n \times n$ 一対比較行列を $A = [a_{ij}]$, $i = 1 \sim$

n , $j = 1 \sim n$ とし、ウエイトを w_i , $i = 1 \sim n$ とする。整合性が良い場合、Aは次式のようになる。

$$A = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

このように、 $a_{ij} = w_i/w_j$ より、任意のkについて

$$a_{ij} = (w_i/w_k)/(w_j/w_k) = a_{ik}/a_{jk} = a_{kj}/a_{ki} \quad (3)$$

となるはずである。したがって、 a_{ij} と a_{kj}/a_{ki} が大きく異なっていれば過大評価または過小評価であると判定できる。

4 判定の適用例

過大評価または過小評価の判定を、式 (1) の一対比較行列Aに適用してみる。各k($k = 1 \sim 4$)について a_{kj} , $j = 1 \sim 4$ の一対比較は正しいと仮定し、式 (3) より、 a'_{ij} を求めたA'より、CI、 λ_{max} 、ウエイト (w_i , $i = 1 \sim 4$) を計算すると表1ようになる。表1において、 $k = 4$ の場合、ウエイトの順位が逆転している。したがって a_{4j} , $j = 1 \sim 4$ の一対比較は正しいとした仮定は

表 1: 結果の比較

	A	k=1	k=2	k=3	k=4
CI	0.15	0.0	0.0	0.0	0.0
λ_{max}	4.4540	4.0000	4.0000	4.0000	4.0000
w_1	0.5870	0.6412	0.7328	0.5915	0.3043
w_2	0.2445	0.1603	0.1831	0.2958	0.3477
w_3	0.1300	0.1067	0.0611	0.0986	0.3044
w_4	0.0385	0.0917	0.0229	0.0140	0.0434

くずれる。そこで、 $k=4$ の計算過程を調べると次のようになる。

$$a'_{12} = a_{42}/a_{41} = (1/8)/(1/7) = 0.875$$

$$a'_{13} = a_{43}/a_{41} = (1/7)/(1/7) = 1.000$$

$$a'_{23} = a_{43}/a_{42} = (1/7)/(1/8) = 1.142$$

以上の結果を式 (4) に示す。ただし、上三角のみ値である。

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0.875 & 1 & 7 \\ & 1 & 1.142 & 8 \\ & & 1 & 7 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式 (4) の結果と式 (1) を比較すると、 $a_{42}/a_{41} > 1$ 、 $a_{43}/a_{41} > 1$ でなければならないので、 $a_{41} < a_{42} < a_{43}$ ($a_{14} > a_{24} > a_{34}$) となるはずである。このことから、 A の a_{14} は過小評価であると思われる。

5 一対比較の推定

式 (3) より、ある代替案 k についてのすべての一対比較が慎重に行われ、その結果の整合性が良いと仮定すると、すべての一対比較を行わなくても一対比較行列は完成できる。たとえば、 $k=1$ とすると $a_{1j}, j=2 \sim n$ をもとにして、式 (5) のように上三角について順次決定できる。ただし、この推定方法では一対比較行列の各要素は $1 \sim 9$ の整数またはその逆数という関係はくずれる。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 1 & a_{13}/a_{12} & \cdots & a_{1n}/a_{12} \\ & & 1 & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & a_{1n}/a_{1n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

6 推定の例

推定の例として、代替案が 4 つの場合を考える。式 (6) に示すように一対比較のうち、 $a_{1j}, j=2 \sim 4$ が行われ、比較の誤りがないものと仮定する。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 4 & 2 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \quad (6)$$

一対比較行列のまだ決まっていない要素の比較結果は式 (5) により、次のように推定できる。

$$a_{23} = a_{13}/a_{12} = 4/(1/3) = 12$$

$$a_{24} = a_{14}/a_{12} = 2/(1/3) = 6$$

$$a_{34} = a_{14}/a_{13} = 2/4 = 1/2$$

よって、推定後の一対比較行列は式 (7) のようになる。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 4 & 2 \\ & 1 & 12 & 6 \\ & & 1 & 1/2 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式 (7) より、 $CI = 0.0$ 、 $\lambda_{max} = 4.0$ が得られた。

7 結論

本報告では、次のことが得られた。

- (1) AHP の一対比較について、過大評価または過小評価の判定方法を提案した。
- (2) 一対比較行列を作成するとき、ある代替案に対してのすべての一対比較が正しく行われれば、すべての一対比較を行わなくても一対比較行列は完成できる。

しかし、本報告での提案は、基準とする一対比較が正しいという仮定の下での判定方法および推定方法であり、矛盾が含まれる場合についてはなお検討が必要である。

参考文献

- [1] Nishizawa, K : A Consistency Improving Method in Binary AHP, Journal of Operations Research Society of Japan, Vol.38, No.1, (1995), 21-33.
- [2] 刀根薫：ゲーム感覚意思決定法, 日科技連, (1990), 38-40.