

正值逆数行列の固有多項式の性質と 不完全一対比較行列のウエイトの評価法

01205763 富山大学 経済学部 白石 俊輔 SHIRAISHI Shunsuke
01013386 大分大学 工学部 *小畑 経史 OBATA Tsuneshi
富山大学 経済学部 醍醐 元正 DAIGO Motomasa

1 はじめに

AHPにおいて評価基準や代替案の重要度ウエイトは、正值逆数行列である一対比較行列の(最大固有値に対する)固有ベクトルとして得られる[1, 4, 7]. この固有ベクトルを実際に求めるには、固有多項式を解くのではなく(これは一般に困難なので)、べき乗法を用いるのが一般的である. そのため、これまで一対比較行列の固有多項式が注目されることはほとんどなかった. 我々は正值逆数行列の固有多項式を詳細に調べることで、これが一対比較の整合性の概念と深い関りのあることがわかった. 特に、固有多項式の $n-3$ 次の係数が一対比較の整合性に非常に強い影響をもつ.

ところで、一対比較行列に欠損が生じた場合に、それを補って重要度ウエイトを決定する手法がいくつか提案されてきた([2, 6]やそれらの参考文献を見よ). それらはいずれも一対比較行列の整合度 C.I. を良くしようとの観点に立って考案されている. 我々も同じ観点に立ち、C.I. を最小化(すなわち最大固有値を最小化)することを考えた. しかしこれは容易ではない. そこで先程述べた、固有多項式の係数と整合性の関連に着目し、これを利用して不完全一対比較行列の重要度ウエイトを決定する手法を新たに提案する. さらにこの手法を Harker 法 [2] と比較する.

2 正值逆数行列の固有多項式

行列 A を $n \times n$ 正值逆数行列とし、 A の固有多項式を

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &:= \det(\lambda E - A) \\ &= \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1} \lambda + c_n \end{aligned}$$

と表す (E は単位行列). このとき次が成り立つ.

命題 1 行列 A を $n \times n$ 正值逆数行列とする. このとき A が整合的であること、すなわち

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik}, \quad \text{for all } i, j, k = 1, \dots, n$$

が成り立つことと

$$P_A(\lambda) = \lambda^n - n\lambda^{n-1}$$

が成り立つこととが同値である.

これより A の整合性が崩れるのは、 $P_A(\lambda)$ に $n-2$ 次以降の「余分な」項がくっついている場合、だといえる. そこで、この「余分な」項をより詳しく見てみよう.

固有多項式の係数を反復的に計算するための手法である、フレーム法 [3] を用いることにより、 $P_A(\lambda)$ の $n-2$ 次の係数 c_2 と $n-3$ 次の係数 c_3 とが以下のように表される.

命題 2 A が逆数行列ならば $c_2 = 0$.

命題 3 $n \geq 3$, A が $n \times n$ 逆数行列ならば、

$$\begin{aligned} c_3 &= 2 \binom{n}{3} - \sum_{i < j < k} \left(\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} \right) \\ &= \sum_{i < j < k} \left\{ 2 - \left(\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

系 1 $n \geq 3$, A が $n \times n$ 正值逆数行列ならば、 $c_3 \leq 0$.

A の整合性を判断するには、実は c_3 だけを見ればよい.

定理 1 $n \geq 3$, A が $n \times n$ 正值逆数行列のとき、 A が整合的であることと、 $c_3 = 0$ となることとが同値である.

3 不完全一対比較行列の重要度ウエイト

この節では、前節での結果を利用して、不完全一対比較行列のウエイトの評価法を新たに提案する. そして Harker 法 [2] との比較を行う.

†白石 俊輔, shira@eco.toyama-u.ac.jp
‡小畑 経史, obata@ccsis.oita-u.ac.jp
††醍醐 元正, daigo@eco.toyama-u.ac.jp

3.1 我々の提案する手法

ここでは欠損を一つだけもつ場合を考える. 一般性を失うことなく, その欠損部分は $(1, n)$ 成分だと考えてよい. すなわち行列

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & x \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/x & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

を考える.

この行列 $A(x)$ の最大固有値 $\lambda_{\max}(x)$ をできるだけ小さくして n に近づけたいのだが, これはそう簡単なことではない. そこで, $A(x)$ の固有多項式の $n-3$ 次の係数, これを $c_3(x)$ とおく, に注目する. 定理 1 より, $c_3(x) = 0$ が成り立つことと $A(x)$ が整合的であること (これは $\lambda_{\max}(x) = n$ と同値) が同値であり, また系 1 より $c_3(x) \leq 0$ であることがわかる. したがって $\lambda_{\max}(x)$ を小さくする代わりに $c_3(x)$ を大きくして 0 に近づけても, 同じように整合性がよくなるであろうと期待される.

以上より, 我々は以下のような手法を提案する.

[Proposal method]

Step 1 最適化問題:

$$\max_x c_3(x) \quad (1)$$

の解 x_0 を見つける.

Step 2 $A(x_0)$ の最大固有値に対応する固有ベクトルを求める.

Step 3 求めた固有ベクトルを正規化したものを重要度ウェイトと定める.

実際には 命題 3 より, 最適化問題 (1) は

$$\min_x \sum_{j=2}^{n-1} a_{1j} a_{jn} \frac{1}{x} + \sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{a_{1j} a_{jn}} x \quad (2)$$

と等価であることがわかる. 問題 (2) の解 x_0 は簡単に求めることができ,

$$x_0 = \sqrt{\frac{\sum_{j=2}^{n-1} a_{1j} a_{jn}}{\sum_{j=2}^{n-1} \frac{1}{a_{1j} a_{jn}}}} \quad (3)$$

となる. そのため上の Step 1 は

Step 1' (3) により x_0 を計算する.

に置き換えられる.

3.2 Harker 法との比較実験

我々の手法と Harker 法とを比較するため次のような実験を行った.

Step 1 a_{1n} を除く a_{ij} , $i < j$ として, $1, \dots, 9$ とその逆数をランダムに発生させ, 不完全一対比較行列を生成する.

Step 2 我々の手法による最大固有値 $\lambda_{\max}(x_0)$ と Harker 法による最大固有値 $\bar{\lambda}_{\max}$ を計算する.

Step 3 $\lambda_{\max}(x_0)$ と $\bar{\lambda}_{\max}$ のどちらが小さいかを判定しその差を求める.

この実験を $n = 4, \dots, 10$ のそれぞれについて 1,000 回繰り返したところ, n が 10 の場合を除き, 我々の手法が優れていた回数が半数を越えていた. 特に n が小さいほど我々の手法が優れていた回数が増える傾向がみられた.

参考文献

- [1] B. L. Golden, E. A. Wasil and P. T. Harker (Eds.): *The Analytic Hierarchy Process*, (Springer Verlag, 1989).
- [2] P. T. Harker: Alternative Modes of Questioning in the Analytic Hierarchy Process, *Mathl. Modelling*, **9** (1987) 353-360.
- [3] 伊理 正夫: 線形代数 II, (岩波書店, 1994).
- [4] T. L. Saaty: *The Analytic Hierarchy Process*, (McGraw-Hill, 1981).
- [5] S. Shiraishi, T. Obata and M. Daigo: Properties of a Positive Reciprocal Matrix and Their Application to AHP, *Working Paper No. 168, Faculty of Economics, Toyama University*, (1997) <http://160.26.91.59/AHP/SimpleSystem/reciprocal.ps>
- [6] E. Takeda and P. L. Yu: Assessing Priority Weights from Subsets of Pairwise Comparisons in Multiple criteria Optimization Problems, *European J. Oper. Res.*, **86** (1995) 315-331.
- [7] 刀根 薫: ゲーム感覚意思決定法, (日科技連, 1986).