

目標計画法から見た DEA-判別分析法

01205520	東京理科大学	末吉 俊幸	SUEYOSHI Toshiyuki
02302130	東京理科大学	*多賀谷 英明	TAGAYA Hideaki
02900270	東京理科大学	渡辺 伸輔	WATANABE Shinsuke

1. はじめに

本研究では、目標計画法の視点から判別分析法と DEA (Data Envelopment Analysis) の相違点と類似点を明らかにする。そしてそれらの特徴を基にして、DEA の長所を判別分析法に組み込んだ新しいモデル“DEA-判別分析法”を提唱する。

2. 判別分析法

判別分析法は、大きく分けて統計的な手法と目標計画法ベースの手法がある。本研究では、目標計画法の視点から判別分析法を再検討するため、目標計画法ベースの手法に着目する。目標計画法ベースの手法は複数あるが、その中でも Freed や Glover が提唱した MSD (Minimize Sum of Deviations) モデルは、計算上の実用性から数多く実用されている。今、 n 個の DMU (Decision Making Units : $j=1, \dots, n$) があると、それぞれ DMU は k 個の要因 ($i=1, \dots, k$) で特徴づけられているとすると、MSD モデルは次のようにモデル化される。

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j \in G_1} S_j^+ + \sum_{j \in G_2} S_j^- & (1) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^k \alpha_i z_{ij} + S_j^+ \geq d, \quad j \in G_1 \\ & \sum_{i=1}^k \alpha_i z_{ij} - S_j^- \leq d - \eta, \quad j \in G_2 \\ & S_j^+, S_j^- \geq 0, \alpha_i, d: \text{制約なし.} \end{aligned}$$

ただし、 α_i は各要因の重み付けを表す判別係数、 d は境界値、 S_j^+ 、 S_j^- はそれぞれのグループの Slack 変数、 η はグループ間に隔たりを設けるための正の小数であり、 η を設けることにより、自明解 ($\alpha_i^* = 0, d^* = 0$) を避けることができる。(1) 式に

より得られた α_i^* 、 d^* より、新たにサンプルされた DMU_h は ($\sum_{i=1}^k \alpha_i^* z_{ih}$) と d^* を比較することで、どちらのグループに属するか判別できる。

ここで、(1) 式と目標計画法の一般モデル

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^n S_j^+ + \sum_{j=1}^n S_j^- & (2) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^k \alpha_i z_{ij} + S_j^+ - S_j^- = d_j, \quad j=1, \dots, n \\ & S_j^+, S_j^- \geq 0, \alpha: \text{制約なし.} \end{aligned}$$

を比較すると、(2) 式では両側の Slack を最小化しているが、(1) 式は、片側の Slack のみを最小化している点などの相違点がある。これは、(2) 式では目標値 d_j からの隔たりを最小化している一方、(1) 式は誤判別を最小化しているためである。

3. DEA-加法モデル

DEA-加法モデルは Charnes などにより 1985 年に提唱されたモデルであり、DMU_h について次のようにモデル化される。

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{i=1}^k S_j^+ + \sum_{r=1}^s S_r^- & (3) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + S_i^+ = x_{ih}, \quad i=1, \dots, k \\ & \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - S_r^- = y_{rh}, \quad r=1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & S_i^+, S_r^-, \lambda_j \geq 0. \end{aligned}$$

ただし、 x_{ij} と y_{rj} はそれぞれ DMU_j の i 番目の入力項目、 r 番目の出力項目を表わしている。ここで (3)

式と(2)式を比較すると、(3)式では DMU は $(\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1)$ で凸結合されているが、(2)式では、 $(\sum_{i=1}^k \alpha_i z_{ij})$ で結合されている。この他にもいくつかの相違点はあるが、総じて見ると、DEA-加法モデルは目標計画法の特殊形と考えられる。

4. DEA-判別分析法

本研究では、判別分析法 (MSD モデル) に DEA の長所、すなわち DMU を凸結合で結ぶという特徴を組み込んだ新しいモデル DEA-判別分析法を提唱する。DEA-判別分析法は次の2段階に分けられる。

Stage 1 (クラス分けとオーバーラップの明確化)

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j \in G_1} S_{1j}^+ + \sum_{j \in G_2} S_{2j}^- \quad (4) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^k z_{ij} \alpha_i + S_{1j}^+ - S_{1j}^- = d, \quad j \in G_1 \\ & \sum_{i=1}^k z_{ij} \beta_i + S_{2j}^+ - S_{2j}^- = d - \eta, \quad j \in G_2 \\ & \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \\ & \sum_{i=1}^k \beta_i = 1, \end{aligned}$$

$$S_{1j}^+, S_{1j}^-, S_{2j}^+, S_{2j}^-, \alpha_i, \beta_i \geq 0, d: \text{制約なし.}$$

ただし、 α_i, β_i は判別係数であり、 S_{1j}^- と S_{2j}^+ は、正しい判別を表わすスラックを示している。

(4) 式により得られた $\alpha_i^*, \beta_i^*, d^*$ により、新たにサンプルされた DMU_h は次のように判別できる。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{i=1}^k z_{ih} \alpha_i^* > d^*, \sum_{i=1}^k z_{ih} \beta_i^* \leq d^* \text{ または } \sum_{i=1}^k z_{ih} \alpha_i^* \leq d^*, \\ & \sum_{i=1}^k z_{ih} \beta_i^* > d^* \text{ のとき、オーバーラップ上にある,} \\ \text{(b)} \quad & \sum_{i=1}^k z_{ij} \alpha_i^* \geq d^*, \sum_{i=1}^k z_{ij} \beta_i^* \geq d^* \text{ のとき、} G_1 \text{ に属} \\ & \text{する,} \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{i=1}^k z_{ij} \alpha_i^* < d^*, \sum_{i=1}^k z_{ij} \beta_i^* < d^* \text{ のとき、} G_2 \text{ に属} \\ \text{する.}$$

(a) の“オーバーラップ上にある”ということは、その DMU が G_1, G_2 両グループに属していることを意味している。こういった場合、専門家に意見を聞き判別することが妥当であるが、それができない場合などの代替案として、次のモデルを提唱する。

Stage 2 (オーバーラップの対処)

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{j \in G_1} S_{1j}^+ + \sum_{j \in G_2} S_{2j}^- \quad (5) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^k z_{ij} \lambda_i + S_{1j}^+ - S_{1j}^- = d \quad j \in G_1 \\ & \sum_{i=1}^k z_{ij} \lambda_i + S_{2j}^+ - S_{2j}^- = d - \eta, \quad j \in G_2 \\ & \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \\ & S_{1j}^+, S_{1j}^-, S_{2j}^+, S_{2j}^-, \lambda_i \geq 0, d: \text{制約なし.} \end{aligned}$$

このモデルは、(4) 式において $\alpha_i = \beta_i$ としたものであり、その結果1つの判別関数で判別している。

(5) 式により得られた λ_i^*, d^* により、新たにサンプルされた DMU_h は次のように判別できる。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{i=1}^k z_{ih} \lambda_i^* \geq d^* \text{ のとき、} G_1 \text{ に属する,} \\ \text{(b)} \quad & \sum_{i=1}^k z_{ih} \lambda_i^* < d^* \text{ のとき、} G_2 \text{ に属する.} \end{aligned}$$

5. 実証研究と結論

DEA-判別分析法と他の手法を比較するため、日本の銀行のランキングデータを使用し、比較検討を行なった分析結果を発表する。

本研究では新しい判別分析モデル、DEA-判別分析法を提唱した。DEA-判別分析法はまだ研究の初期段階にあり、これからさらなる発展が期待できる。

6. 参考文献

Toshiyuki Sueyoshi, "DEA-Discriminant Analysis in the View of Goal Programming," *European Journal of Operational Research* (1998).