

橋の適正配置モデルに基づく逐次添加計画

慶應義塾大学
 01107680 慶應義塾大学

*岡本 貴章 OKAMOTO Takaaki
 栗田 治 KURITA Osamu

1. はじめに

広域的なインフラストラクチャーの1つに橋(あるいはトンネル)という交通施設がある。海峡や河川で分断された2つの地域(あるいは国)の相互交流を実現するためには橋の建設が不可欠である。

本研究では、以下の疑問に答えるための数理モデルを構築し議論している。

- 1) 橋が全く存在していないところへ1本だけ設ける時の橋の位置はどこにすべきか?(2節)
- 2) 複数の橋を同時に配置する時の橋の位置はどこにすべきか? (3節)
- 3) 複数の橋を設ける時の逐次添加計画はどうすべきであるか? (4節)

2. 1本の橋の適正配置モデル

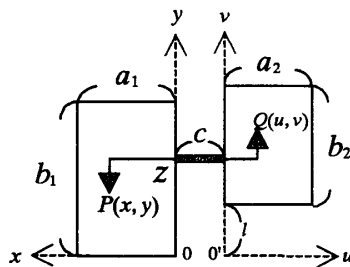


図1 川を挟む2つの地域

幅 c の川によって分断された2つの地域を図1の如くに与える。地域1は $a_1 \times b_1$ の矩形であり、地域2は $a_2 \times b_2$ の矩形である。

また、以下を仮定する。

- 各地域内には縦及び横方向に無限に稠密な格子状道路が存在する。
- 人々は移動距離が最小になるような経路に対応する橋を利用する。
- 移動の起・終点 P, Q は互いに独立であり、各々の地域内で一様に分布する。つまり、2地域間のトリップ密度は、2地点の距離に関係なく一様である。
- 橋は川に対し垂直に建設する。
- 橋及び道路の容量、そして道路の混雑を一切考慮しない。

2地域間の移動は図中の $P=(x, y)$ から $Q=(u, v)$ への経路の如くに記述される。この距離は、

$$(x+y-z) + c + (u+v-z) \quad (1)$$

である。このうち $x+c+u$ という図中の横方向の移動は橋の位置に全く影響されない。そこで、橋の位置に依存する縦方向の移動のみに着目し、これを $r(P, Q)$ とする:

$$r(P, Q) = |y-z| + |v-z| \quad (2)$$

まず、準備として地域1の単位面積領域と地域2の単位面積領域との間の年当たりトリップ発生回数を k [回/($\text{km}^4 \cdot \text{年}$)] とする。

また単位当たりの移動コスト(燃費に時間価値を加えたもの)を p [円/km] とする。

この時、年当たりの移動コスト(最小化すべき目的関数)を $F_1(z)$ とすると、これは次のように計算できる:

$$F_1(z) = kp \int_0^{a_1} \int_0^{b_1} \int_0^{a_2} \int_l^{b_2} r(P, Q) dx dy du dv \quad (3)$$

$$= \frac{kpa_1a_2}{2} \{2(b_1+b_2)z^2 - 4b_1(l+b_2)z + 2b_1l(l+b_2) + b_1b_2(b_1+b_2)\} \quad (4)$$

明らかなように $F_1(z)$ は凸(2次)関数であり、2つの地域が川に沿って重なりを持つ場合(すなわち $0 \leq l \leq b_1$ の場合)は、1階の条件を満たす

$$z^* = \frac{b_1(l+b_2)}{b_1+b_2} \quad (5)$$

が大域的な最適配置を与える。

もしも、2つの地域の最下端が一致していれば(すなわち $l=0$)、さらに簡単に

$$z^* = \frac{b_1b_2}{b_1+b_2} \quad (6)$$

となる。つまり、橋の最適配置に影響を与える重要な要素は2つの地域の川に沿った広がりである。

また2つの地域が重なりを持たない場合は、

$$b_1 \leq z \leq l \quad (7)$$

なる全ての z が最小解を与えることは自明である。

3. n 本の橋の適正配置モデル

n 本の橋を同時に配置することができるとして前節と同様の問題を解いてみよう。但し、橋の位置を原点に近い順に

$$z_1, z_2, \dots, z_n \quad (8)$$

と与える。そしてトリップの橋への割り当てに関しては、[2,3]と同様の Recti-Linear Voronoi 図による方法を適用することができる(ここで詳述しない)。結果として得られる年当たりの移動コストは次式の通りである:

$$F_n = \frac{kpa_2}{2} \left\{ \frac{2}{3}z_1^2 - \frac{2}{3}z_2^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} z_i z_{i+1} (z_i - z_{i+1}) + 2(h+l+b_1)z_1^2 - 2z_2^2 - 4h(l+b_1)z_n + 2b_1(l+b_1) + b_1b_2(h+b_2) \right\} \quad (9)$$

1 階の条件の連立方程式を解くことにより橋の建設位置が決定するが、本稿では $l=0$ かつ $b_1=b_2=b$ の場合について記述しよう:
 $\forall i \in 1, 2, \dots, n-1$

$$z_i^* = \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}(n-1)} + \frac{i-1}{n-1+\sqrt{2}} \right) b; \quad (10)$$

$$z_n^* = \frac{(2n^2 - 4n + 1)(2 - \sqrt{2})}{2\{(2n^2 - 5n + 1) - \sqrt{2}(n^2 - 3n + 1)\}} b \quad (11)$$

4. 橋の逐次添加に関する経済計算

現実的には経済的な制約により、複数の橋を同時に建設することが不可能な場合が多い。そうした状況に対応するには、橋を逐次的に添加していくモデルを作っておけばよい。ここで重要なことは、今まさに建設しようとする橋の効果のみを考えるか、それとも将来建設すべき橋とを合わせた効果を考えるか、という視点である。本研究では、前者を**短期的視座による逐次添加**、後者を**長期的視座による逐次添加**と呼んで両者をモデル化し、どちらの計画を採用すべきかを議論している。

本稿では簡単のため、 $l=0$ かつ $b_1=b_2=b$ の場合について記述しよう。

そして架けられる橋の上限を 2 本とする。

この時、 F_1 の最小解を ζ_1^* とすると

$$\zeta_1^* = \frac{b}{2} \quad (12)$$

である。また、 F_2 の最小解を (z_1^*, z_2^*) とすると、

$$(z_1^*, z_2^*) = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}b, \frac{\sqrt{2}}{2}b \right) \approx (0.293b, 0.707b) \quad (13)$$

と与えられる。

加えて、次を定義しておく:

q = [橋の建設コスト]

T = [橋の耐用年数]

τ = [1 本目の橋を建設してから 2 本目の橋を建設するまでの期間]

尚、耐用年数が経過するとその橋は直ちに架けかえられるものとする(解体コストは別立てで計上してはいない)。

以下に 2 つの逐次添加法を個別に記述しておく:

短期的視座による逐次添加

初年度に ζ_1^* の位置に 1 本目の橋を建設する。

τ 年後に $F_2(\zeta_1^*, z_2)$ を最小化する $z_2 = \zeta_2^*$ に 2 本目の橋を建設する。1 本目の橋の耐用年数が過ぎたら、今度は $F_2(z_1, \zeta_2^*)$ を最小化する $z_1 = \zeta_1^*$ に架け替える。以降、耐用年数が過ぎたら他方の(まだ現役の)橋の位置を所与とする年当たりコストを最小化するように架け替え操作を続けていく。この場合、橋の位置は徐々に変化してゆき、2 本の橋を同時に架ける場合の最適解に漸近する。

長期的視座による逐次添加

初年度に z_1^* の位置に建設し、 τ 年後に z_2^* の位置に建設する。この場合、2 本目の橋が建設されてしまえば、架け替えをしても、未来永劫にわたり同一の 2 地点に橋が存在しつづけることになる。

2 つの逐次添加法の比較 (数値例)

数値例として以下を与えてみよう:

$a_1 = a_2 = 5$ km, $b = 10$ km, $k = 1000$ 回/(km⁴・年);

$q = 4 \times 10^9$ 円, $T = 50$ 年, $p = 50$ 円/km

この時の各逐次添加法に対する累積コストを時間 t と τ を変数として算出し、累積コストを比較するために優劣分岐を図上に表すと図 2 が得られる。

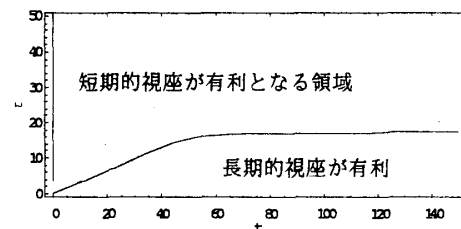


図 2 2 つの逐次添加法の優劣分岐

ここで重要なことは、2 本目の橋の建設が遅れると(つまり τ の値が大きくなると)、もはや短期的視座による逐次添加の計画の方が未来永劫にわたって有利になることである。

5. 結語

本稿の内容は、単純な想定の下での試論であるが、橋の建設に関わる本質的な要素を読み取ることができる:

- 1) 位置の決定を理論的に行い得る。
- 2) 逐次配置計画には橋を建てる時期と橋の位置が本質的に重要である。

6. 参考文献

- [1] 岡本貴章(1998): 2 集落を結ぶための交通施設の最適配置, 慶應義塾大学理工学部管理工学科卒業論文
- [2] 大沢義明(1986): 橋の本数と迂回の関係について, 昭和 61 年度第 21 回日本都市計画学会学術研究論文集, pp241-246
- [3] 井関一隆(1996): ビル間高架連絡通路の最適配置, 慶應義塾大学理工学研究科管理工学専攻修士論文